

El “modelo estándar” del núcleo

Fernando Cristancho

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ANDEAN SCHOOL ON “NUCLEAR PHYSICS IN THE 21ST CENTURY”

Universidad de los Andes, Bogotá, 26-30 Noviembre 2012

Índice

1. El tamaño del núcleo	1
1.1. Dispersión de electrones y estructura nuclear	2
1.2. El radio promedio del núcleo	12
1.3. Un método espectroscópico: átomos muónicos	14
2. El modelo de gota	17
2.1. Masa	18
2.2. Energía de ligadura	19
2.3. Conclusiones de $B/A - vs - A$	23
2.4. Efectos par-impar (“pairing” ~ emparejamiento)	30
2.5. Por qué $N > Z$ para los núcleos estables?	32
2.6. El modelo de gota cargada eléctricamente fermiónica binaria asimétrica	33
2.7. Consecuencias del modelo de gota. La estabilidad del núcleo	36
3. Cantidades cuánticas en el núcleo	40
3.1. Espín	41
3.2. Paridad	43
3.3. Momentos magnéticos	45
3.4. Momentos eléctricos	51

3.4.1.	La expansión en multipolos	51
3.5.	Los multipolos eléctricos nucleares	52
3.6.	La relación $Q \leftrightarrow I$	60
3.7.	Q y la orientación del núcleo	62
4.	El modelo de capas	65
4.1.	Más sobre números mágicos	66
4.2.	Campo medio en el modelo atómico de capas	67
4.2.1.	Solución completa: Hartree-Fock (autoconsistencia)	69
4.3.	El modelo de capas nuclear	70
4.4.	Interacciones residuales	71
4.5.	La forma del potencial medio	73
4.6.	Números cuánticos en el oscilador armónico y en el potencial de Coulomb	74
4.7.	N, ℓ, π en el oscilador armónico	75
4.8.	El lio con los números mágicos	76
4.9.	Acople espín-órbita	77
4.10.	Estructura de Capas en Sistemas Mesoscópicos	82
4.11.	Consecuencias: predicciones para el estado base	85
4.12.	Predicciones para estados excitados	86
4.13.	El modelo de capas deformado	90
4.14.	Deformaciones pequeñas	92

1. El tamaño del núcleo

1.1. Dispersión de electrones y estructura nuclear

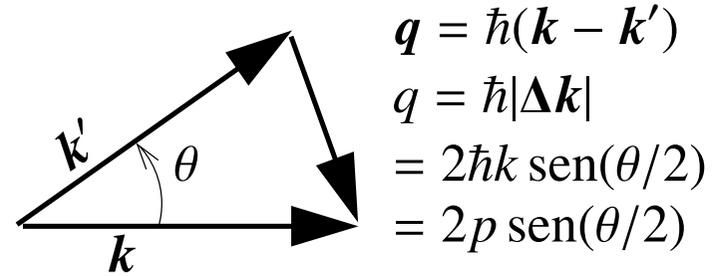
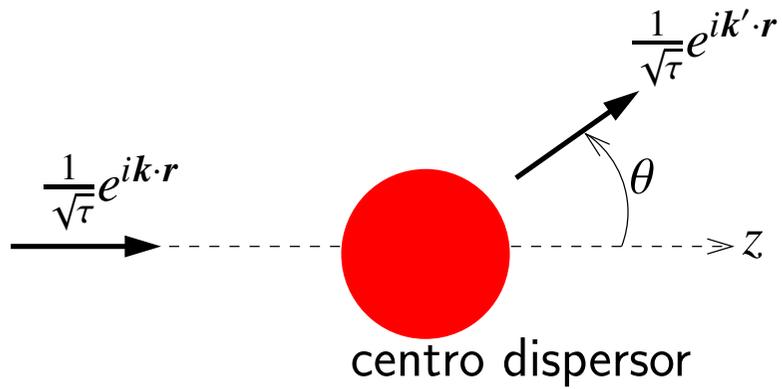
Artículo de revisión:

- R. Hofstadter, *Electron scattering and nuclear structure*, Review of Modern Physics, **28**, 214 (1956).

Textos de referencia:

- E. M. Henley and A. García, *Subatomic Physics*, World Scientific, 3rd ed. (2007).
- M. A. Preston, *Physics of the Nucleus*, Addison-Wesley (1962)

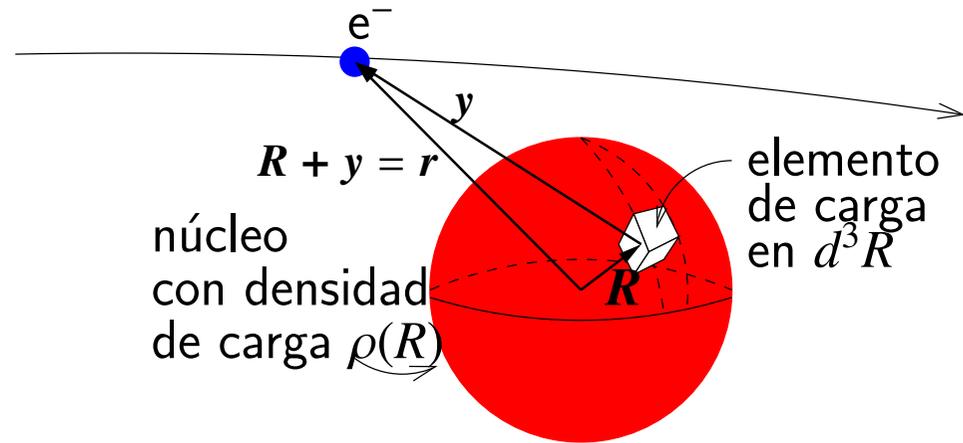
La aproximación de Born



sección eficaz diferencial: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$

función amplitud: $f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}) e^{i/\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r$

- Si usamos e^- estudiaremos la distribución de carga, no la de neutrones.



$$V(r) = \int \frac{Ze^2}{y} \rho(R) d^3R$$

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}) e^{i/\hbar \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3r$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = F^2(q) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = F^2(q) \frac{(Z_e Z_{\text{núcleo}} e^2)^2}{16E^2 \text{sen}^4(\theta/2)}$$

- Para órdenes de magnitud de 1 fm necesitamos electrones con energías cinéticas

$$T_e > 100 \text{ MeV.}$$

- Ojo: estas partículas son altamente relativísticas ($\beta \approx 1$)

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{m_0c\beta\gamma} \simeq 2 \text{ fm} \quad \text{para } T = 100 \text{ MeV}$$

$$T_e = m_0c^2(\gamma - 1), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

- sección eficaz \rightarrow cálculo relativístico “dispersión de Mott”:

- asume carga puntual para el núcleo.
- tiene en cuenta el espín del electrón.
- cinemática relativística.

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}} \cdot \left[1 - \beta^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- Las desviaciones que

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{experimental}} \quad \text{tenga de} \quad \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}}$$

son asociadas a la forma diferente a la puntual para el núcleo. Es decir

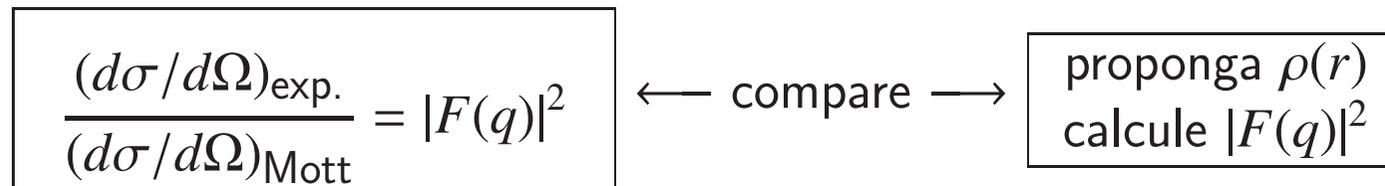
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{experimental}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} \cdot |F(q)|^2$$

$$\text{Factor de forma} = F(q) = \frac{4\pi}{q/\hbar} \int_0^\infty \rho(r) \text{sen}(qr/\hbar) \cdot r \, dr$$

Transformada de Fourier de $F(q)$ = densidad de carga: $\rho(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty F(q) \text{sen}(qr) \, q \, dq$

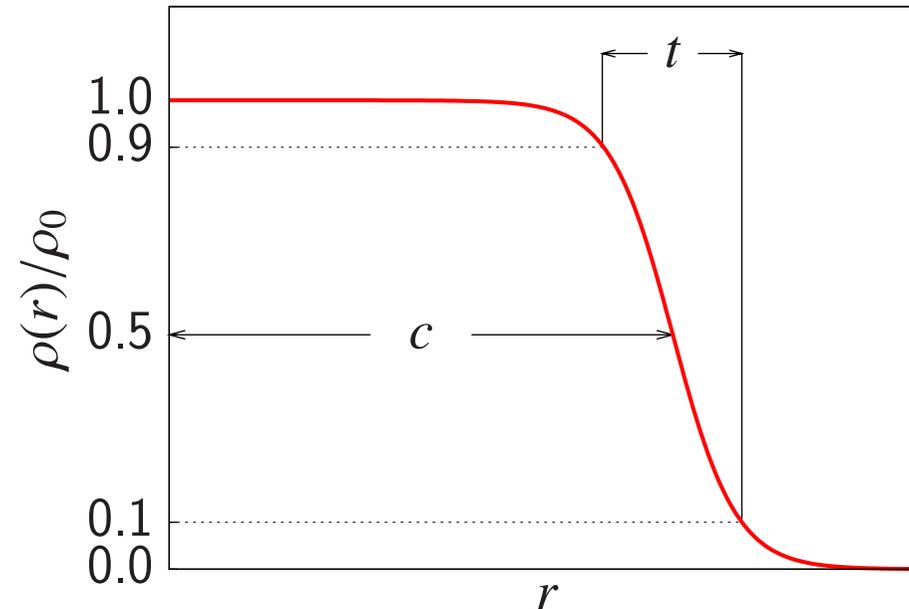
Este cálculo es posible realizarlo si experimentalmente se conoce $F(q)$ para un rango suficientemente amplio de q , es decir de la energía de colisión.

- A la hora de hacer el experimento:



La dependencia más “sencilla” y más descriptiva de ρ con r es la función densidad de Fermi:

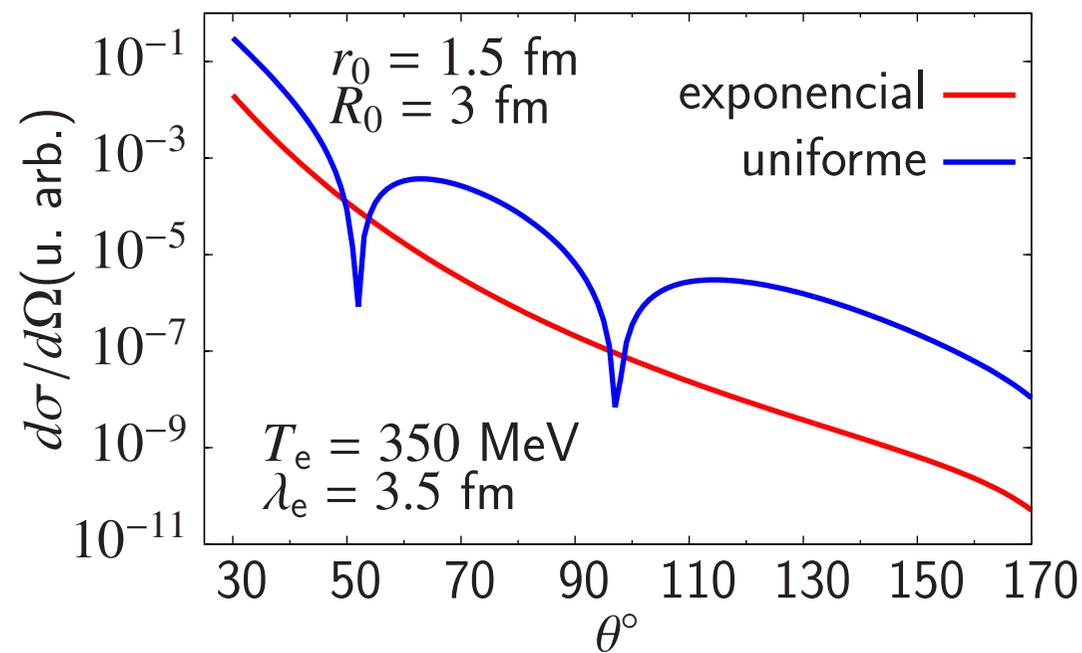
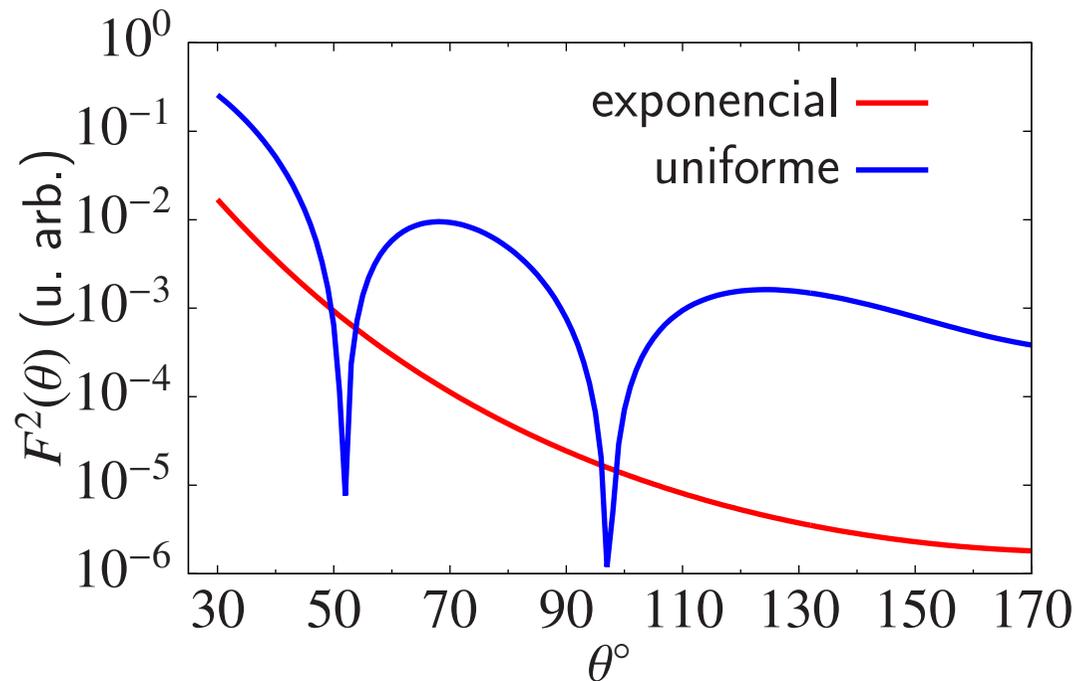
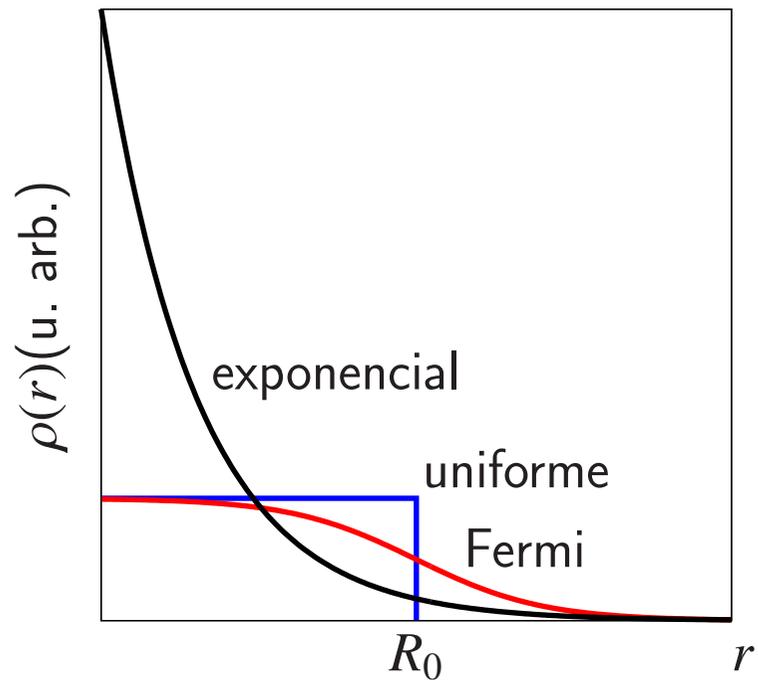
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-c}{a}\right)}, \quad t = (4 \ln 3)a = 4.4a$$



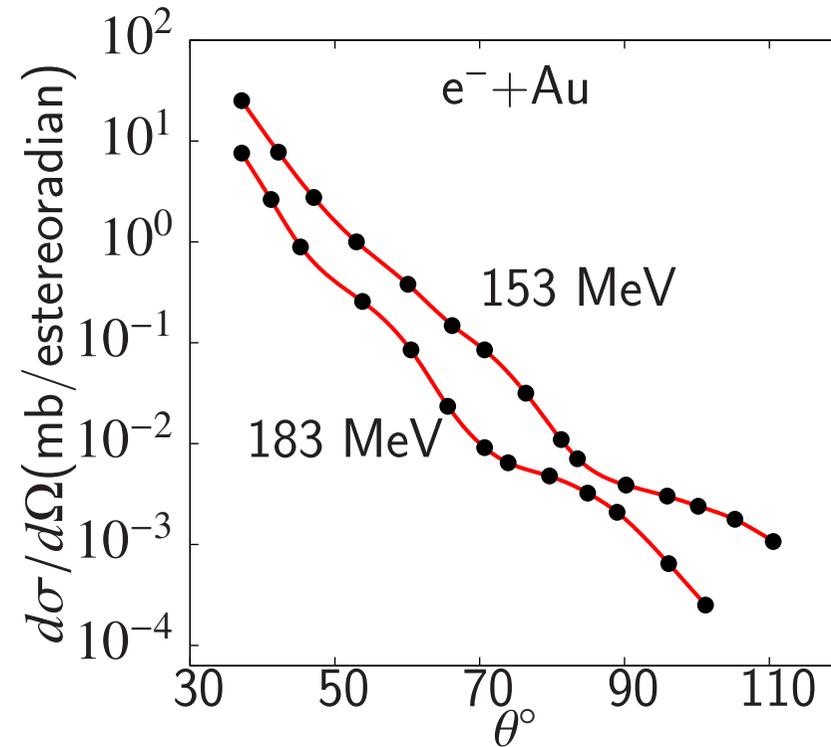
Una comparación del efecto de varias formas de densidad

- exponencial,
- uniforme,
- Fermi

en: D. R. Yennie and D. G. Ravenhall and R. Hofstadter, Phase-Shift Calculations of High-Energy Electron Scattering, Physical Review, **95**. 500 (1954).

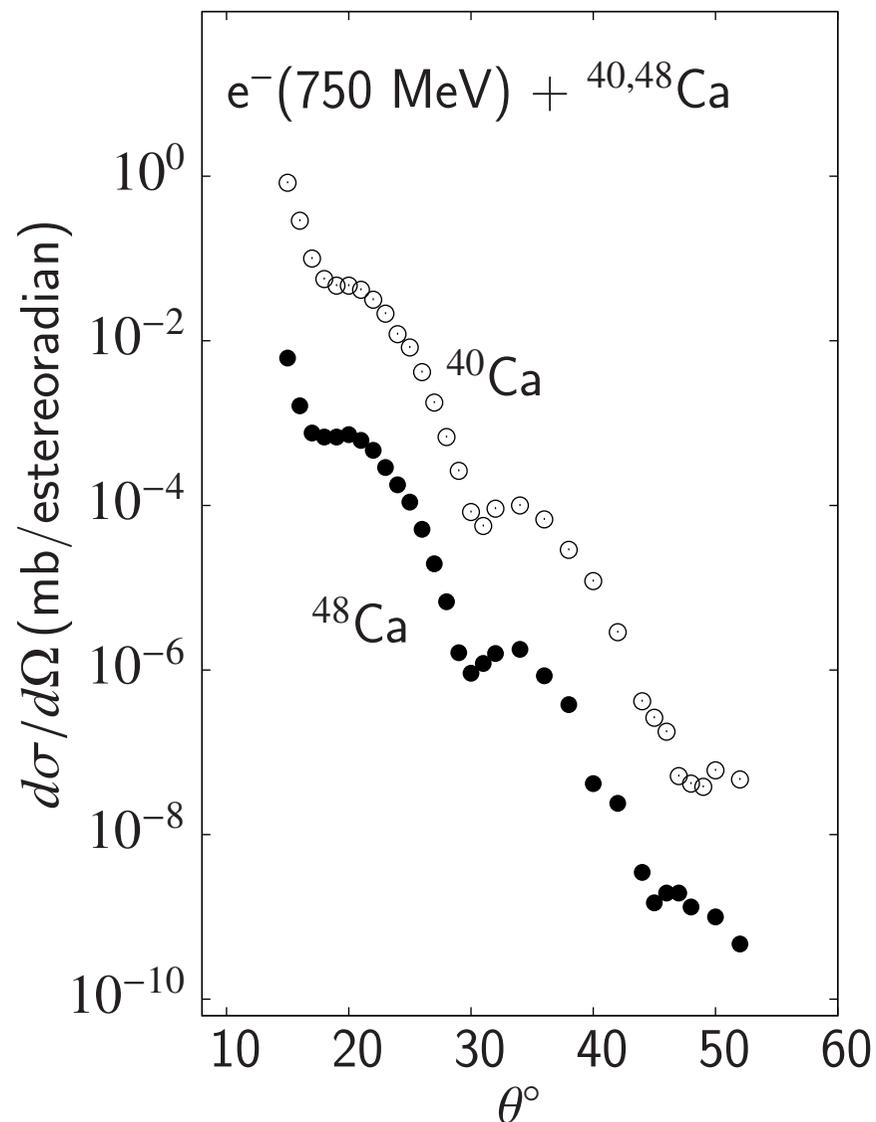


La figura muestra un caso en el que el ajuste de los datos experimentales a una distribución de Fermi es muy bueno:



R. Hofstadter, *Electron scattering and nuclear structure*, Review of Modern Physics, **28**, 214 (1956).

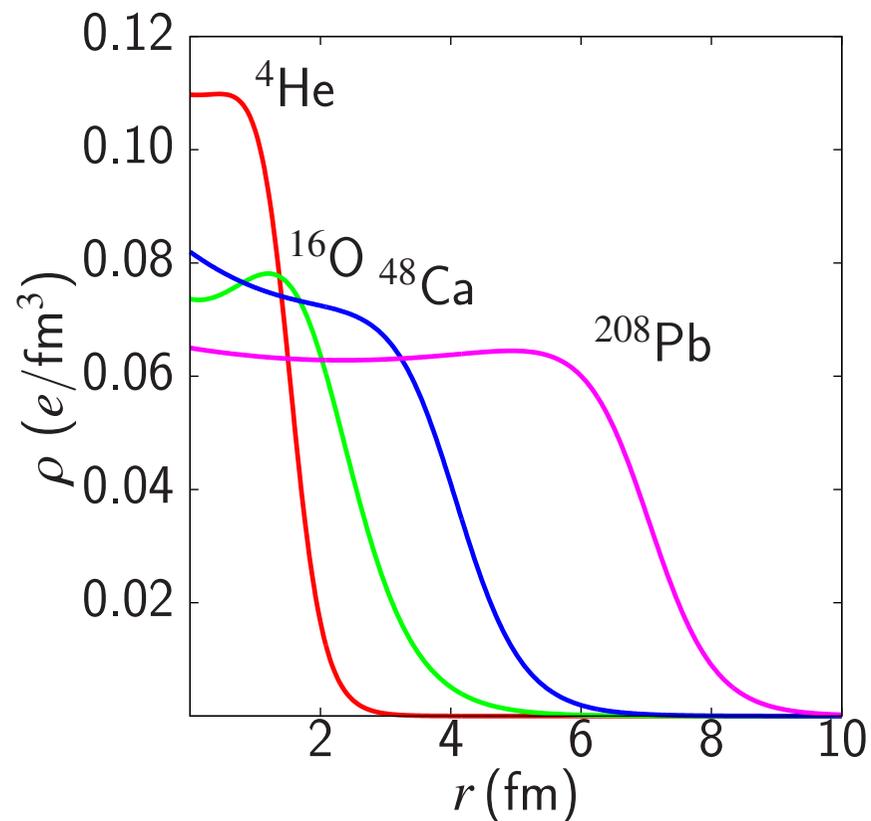
Sin embargo, existen distribuciones de carga no ajustables a las sencillas distribuciones de Fermi:



J. B. Bellicard, *Scattering of 750-MeV electrons by calcium isotopes*, Physical Review Letters **19**, 527 (1967).

Tales datos experimentales pueden ser ajustados usando una función de Fermi modificada de la siguiente manera:

$$\rho(r) = \left[1 + \frac{wr^2}{c^2} \right] \rho_F(r)$$



1.2. El radio promedio del núcleo

- Se define

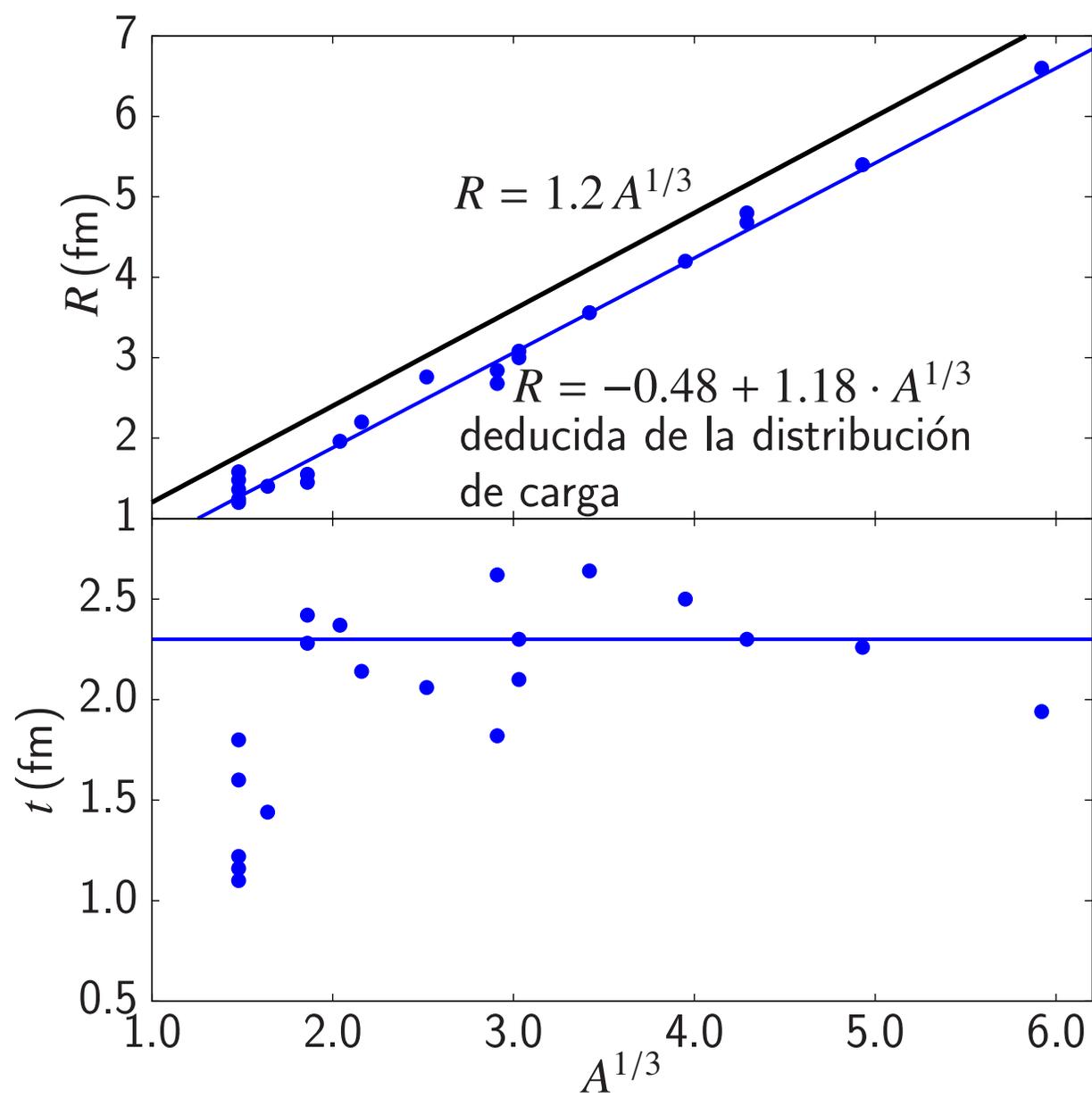
$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) dV = \int r^2 \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

- Para orientarnos, se define la **distribución uniforme equivalente**: aquella distribución uniforme con el mismo valor de $\langle r^2 \rangle$.

$$\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle_{\text{uniforme}} = \int_0^R r^2 \left[\frac{1}{(4/3)\pi R^3} \right] 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} R^2$$

- Todo esto se refiere a la carga eléctrica. ¿Qué hay respecto a los neutrones?
 - Usando n como proyectil, estudiaríamos la distribución de todos los nucleones (p's y n's). Desafortunadamente la interacción fuerte no está tan bien entendida.
 - Debido a la repulsión entre los protones, es de esperar que los neutrones se encuentren preferencialmente en el centro del núcleo.
- Entonces, respecto al conjunto n+p:
Suposición: Es una buena aproximación considerar que la distribución de carga define el tamaño del núcleo.

- Si la densidad de masa es (constante) uniforme: $\rho_{\text{masa}} = \frac{A}{(4/3)\pi R^3} \longrightarrow R \propto A^{1/3}$



1.3. Un método espectroscópico: átomos muónicos

Otra forma de averiguar el radio nuclear... el muón: (μ)

$$\text{carga: } q_\mu = e$$

$$\text{masa: } m_\mu = 106 \text{ MeV} \approx 207m_e$$

$$\text{vida media: } \tau = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{s}$$

$$\text{decaimiento: } \mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$$

En el átomo:

$$\text{radio de la órbita electrónica: } r = \frac{\hbar^2}{m_r Z e^2}$$

$$m_r = \text{masa reducida} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_2/m_1 + 1} \quad m_1 = \text{masa del núcleo}$$

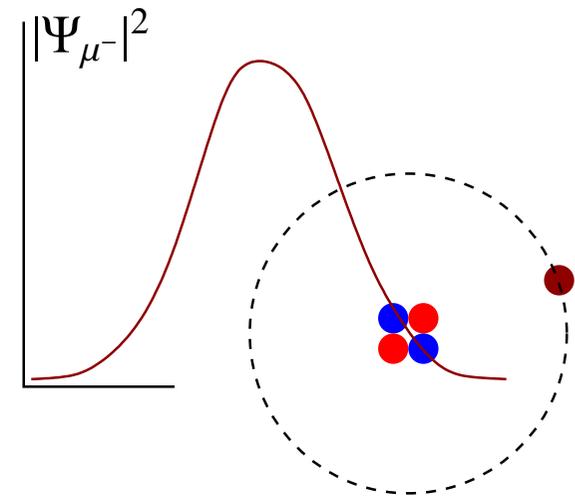
$$m_r(\text{e+núcleo}) \approx m_e$$

$$m_r(\mu+\text{núcleo}) \approx 200 m_e \quad \rightarrow \quad r_{\mu+\text{núcleo}} \approx \frac{1}{200} r_{\text{e+núcleo}}$$

Ejemplo: Átomo $(\alpha\mu^-)^+$

$$r_{\mu^-} \approx \frac{1}{200} r_{e^-}$$

El cambio en la distribución espacial producirá un cambio en los niveles del átomo comparados con el sistema $(\alpha e^-)^+$.



$$E_{\text{Vol}} = \int_{\text{núcleo}} \phi_{\text{el.}}(r) \rho_{\text{núcleo.}}(r) dV$$

$\phi_{\text{el.}}(r)$ = potencial eléctrico producido por la corteza atómica en el núcleo

$\rho_{\text{núcleo}}(r)$ = densidad **nuclear** de carga

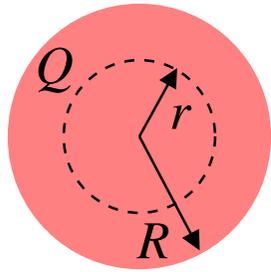
$$E_{\text{Vol}} = \int_{\text{núcleo}} \phi_{\text{el.}}(r) \rho_{\text{núcleo}}(r) 4\pi r^2 dr$$

Comparando las dos configuraciones:

$$\Delta E_{\text{Vol}} = \int_{\text{núcleo}} [\phi_{\mu^-}(r) - \phi_{e^-}(r)] \rho_{\text{núcleo}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Supongamos una esfera uniformemente cargada.

Potencial en su interior:



$$\phi_{\text{el.}}(r) = \frac{2}{3}\pi\rho_{\text{el.}}r^2$$

$$\rho_{\text{el.}} = \frac{Q_{\text{el.}}}{(4/3)\pi R^3} = \begin{cases} \mu \\ e \end{cases}$$

$$\Delta E_{\text{Vol}} \simeq \frac{2}{3}\pi[\rho_{\mu^-}(r=0) - \rho_{e^-}(r=0)] \underbrace{\int_{\text{núcleo}} r^2 \rho_{\text{núcleo}}(r) \cdot 4\pi r^2 dr}_{\langle r^2 \rangle}$$

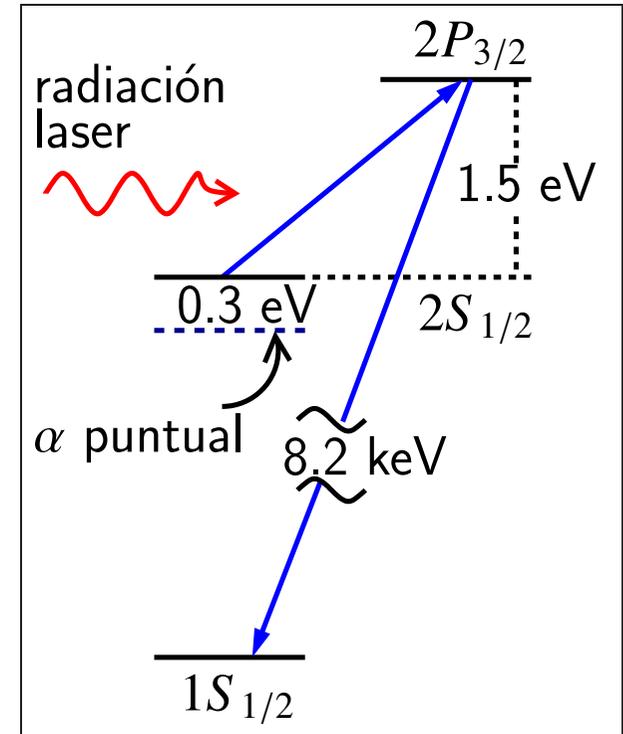
- Medición realizada: transición $2P_{3/2} \longrightarrow 1S_{1/2}$

Conclusión:

$$R(\alpha) = 1.6733(30) \text{ fm}$$

Compilación de resultados:

- G. Frickel, *Nuclear ground state charge radii from electromagnetic interactions*, Atomic Data and Nuclear Data Tables **60**, 177 (1995).
- C. S. Wang and K. C. Chung and A. J. Santiago, *Systematics of nuclear central densities*, Physical Review C, **60**, 034310 (1999).



2. **El modelo de gota**

2.1. Masa

unidad de masa atómica:

$$m_u = u \equiv \frac{1}{12} m({}^{12}_6\text{C}_6)$$

$$1 u = 1.66056 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$$

$$\text{peso atómico} \equiv \frac{m_{\text{átomo}}}{m_u}$$

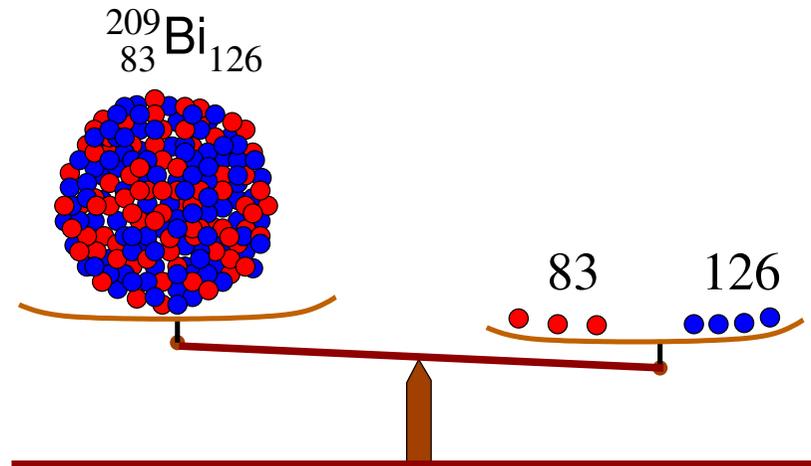
partícula	Masa		Vida media
	u	MeV/c^2	
p	1.007276	938.28	$> 2 \cdot 10^{30}$ a
n	1.008665	939.57	918 s
e^-	$5.48 \cdot 10^{-14}$	0.51104	$> 5 \cdot 10^{21}$ a
$m(n) - m(p) = 1.294 \text{ MeV}/c^2 = 2.53m(e)$			

2.2. Energía de ligadura

Observación experimental:

la masa de un núcleo es menor que la suma de la masa de los nucleones constituyentes:

$$m\left({}_Z^A\text{Nu}_N\right) < N \cdot m(n) + Z \cdot m(p)!!$$

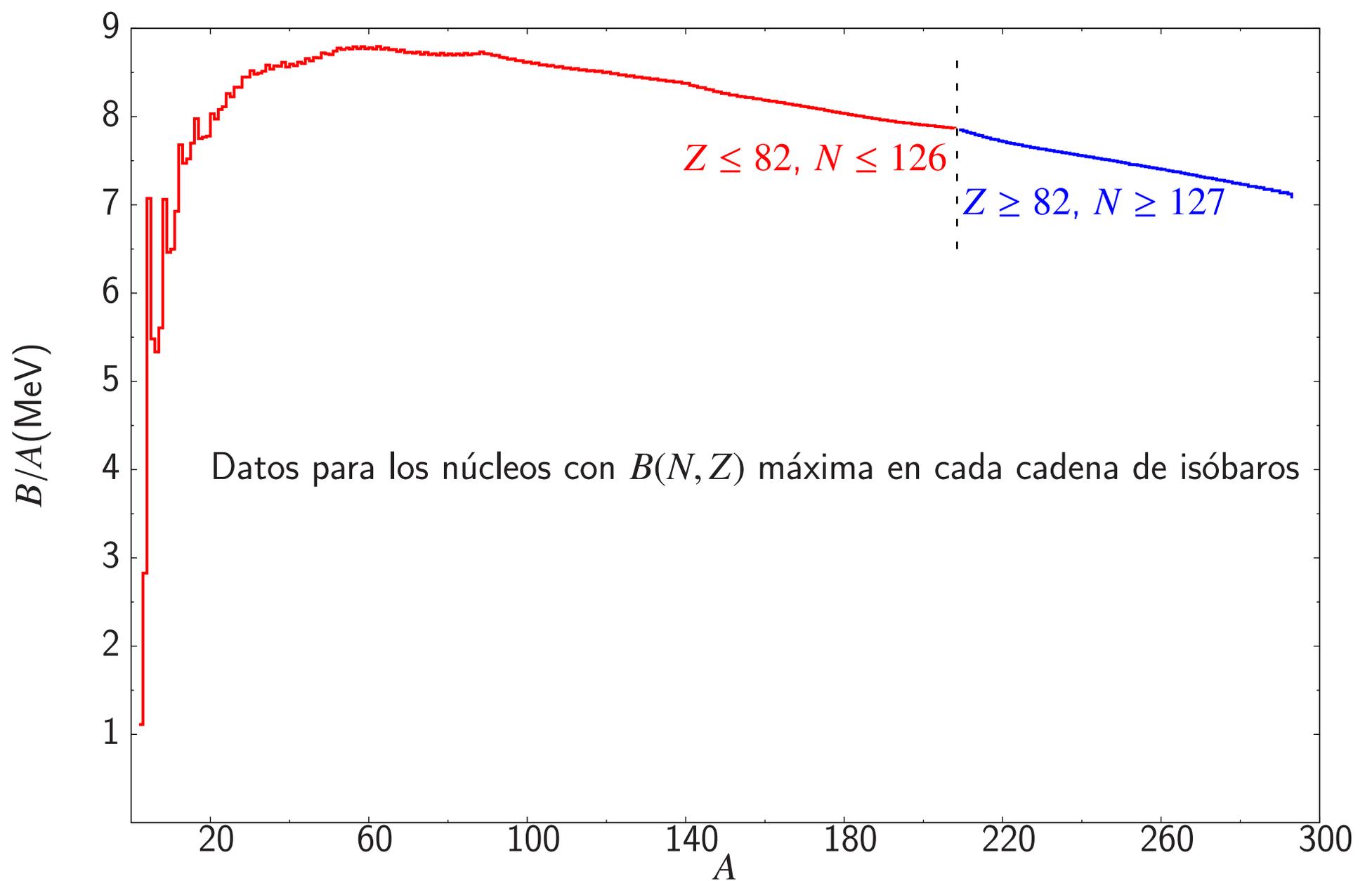


$B \equiv$ energía de ligadura

= energía que se libera cuando un núcleo es formado

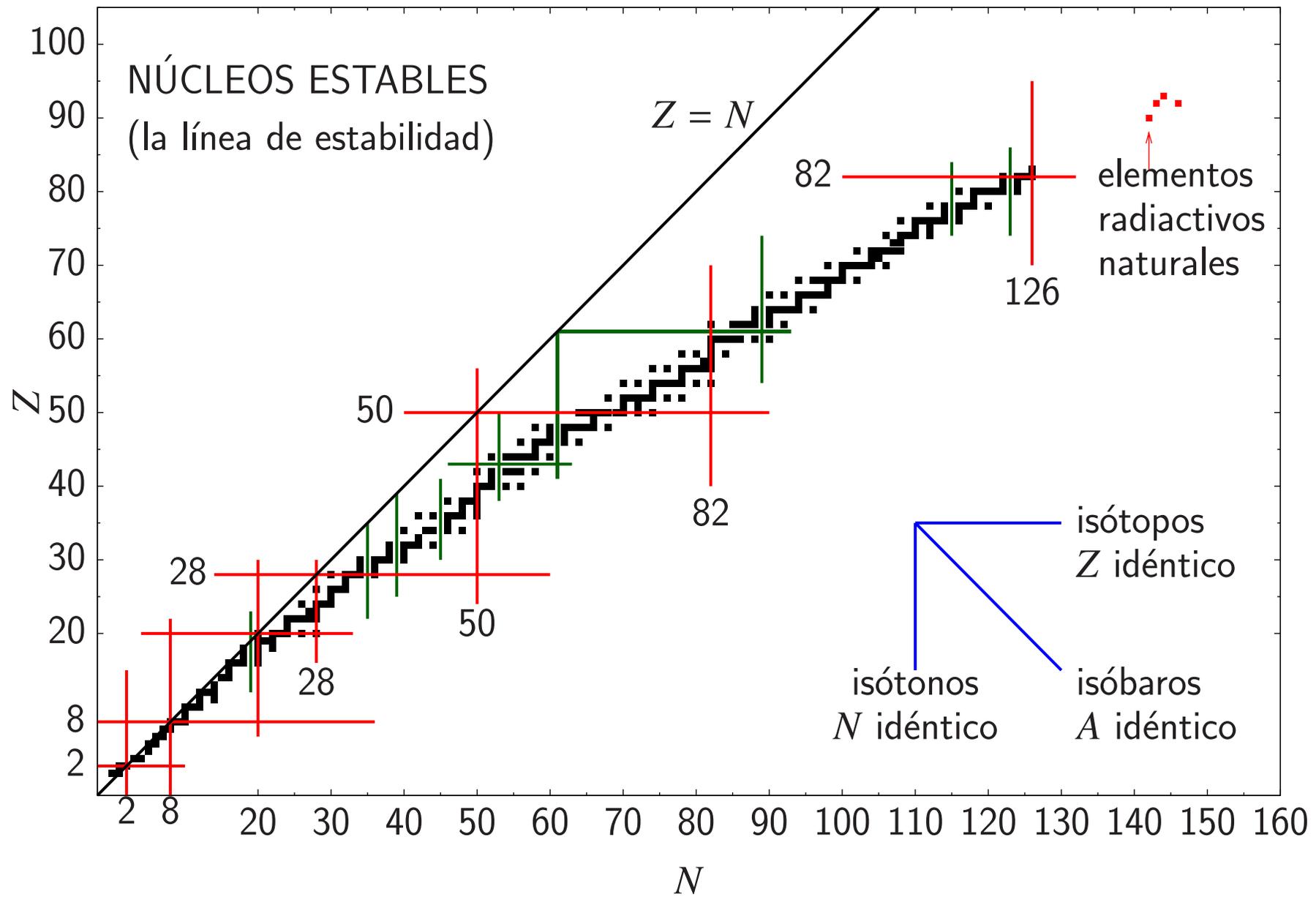
= energía que es necesario entregar para separar el núcleo en sus nucleones constituyentes

$$B = [Zm(p) + Nm(n) - m(N, Z)]c^2 = \Delta m c^2$$



G. Audi et al., *The AME2003 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references* Nucl. Phys. **A729**, 337 (2003).

La Tabla Periódica Nuclear



Observaciones sobre las figuras en las páginas anteriores:

1. B/A vs A , p. 20

- En cada cadena de isobaros (mismo A), se examina cuál de ellos tiene la máxima energía de ligadura $B(Z, A)$ y se grafica tal valor.
- La figura está dividida en dos regiones: $A \leq 208$ y $A \geq 209$, las cuales corresponden *aproximadamente* a la región de núcleos estables, la primera y a la de exclusivamente inestables la segunda.
- La división es *aproximada* por la siguiente razón. El núcleo estable más pesado corresponde a ${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126}$. Es decir, es estable, y tiene $A = 209$, es decir, no está en la primera región a pesar de ser estable.

La razón es que aunque es estable, no tiene la máxima energía de ligadura de su cadena de isobaros.

$A = 209$			
N	Z	símbolo	B/A (keV)
128	81	Tl	7833.36
127	82	Pb	7848.647
126	83	Bi	7847.985
125	84	Po	7835.187

2.3. Conclusiones de $B/A - vs - A$

A. Respecto a obtención de energía

- Para $A \gtrsim 20$, B/A aproximadamente constante.

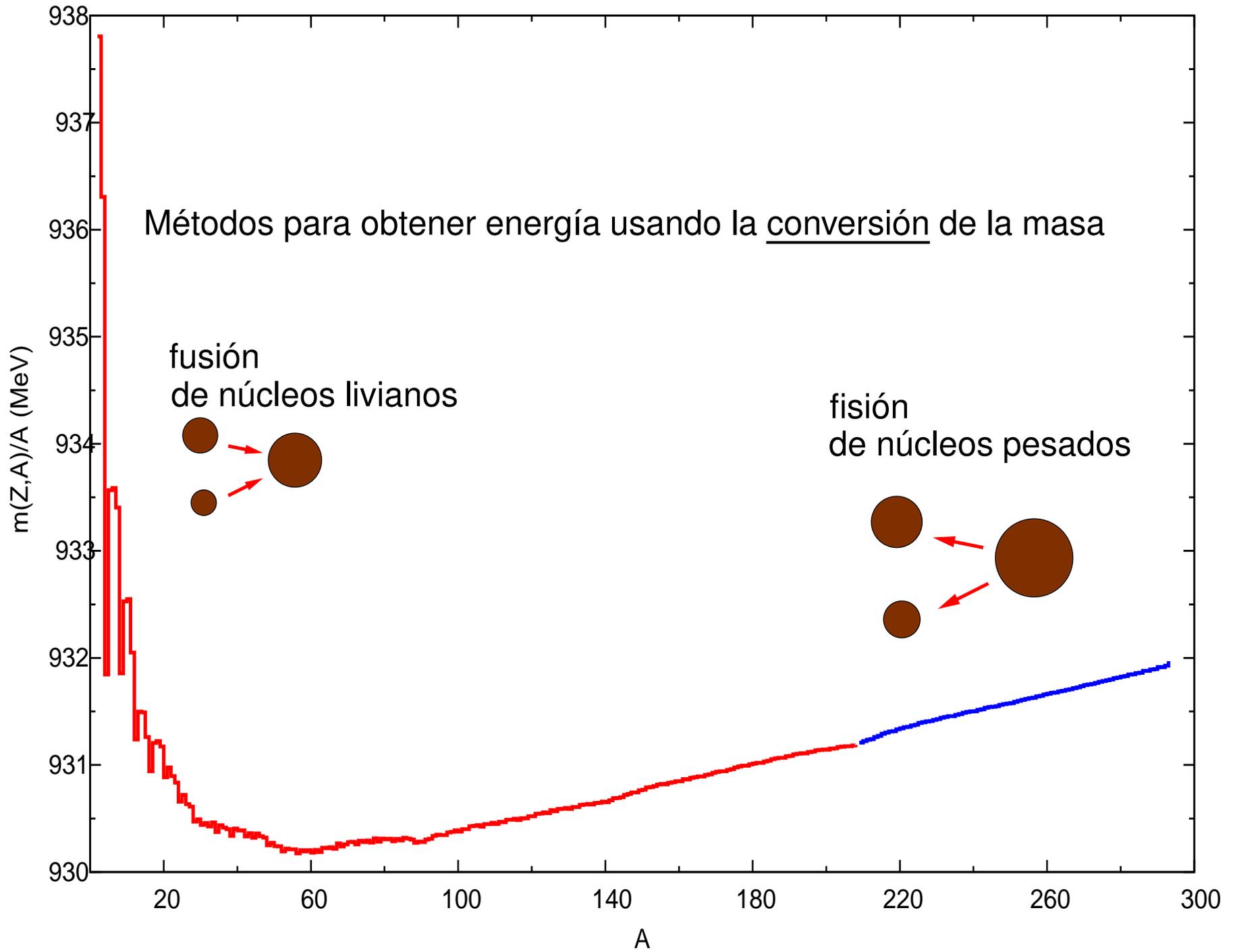
$$\frac{B}{A} \approx 8.5 \text{ MeV}$$

- Puesto que B/A es máxima en $A \approx 60$, se puede ganar energía por
 - fusión de elementos livianos.
 - fisión de elementos pesados.

En ambos casos

$$\Delta m = m_{\text{final}} - m_{\text{inicial}} > 0$$

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$



B. Respecto a la fuerza nuclear

- Si cada uno de los nucleones

$$A$$

interactuara con cada uno del resto,

$$A - 1$$

energía total almacenada, \propto número de interacciones $\propto B$

$$B \propto \frac{1}{2}A(A - 1) \longrightarrow B \propto A^2.$$

- Sin embargo, (ver gráfica) $B \propto A$.

Conclusiones

- cada nucleón **no** interactúa con todos los otros, =
no interactúa con un número de nucleones que sea proporcional a A .
- Independientemente del núcleo, cada nucleón interactúa con algún número pequeño (fijo, pues es independiente de A).
- La fuerza nuclear se “satura”: sólo “alcanza” para unos pocos.

C. Nucleosíntesis: un ejemplo

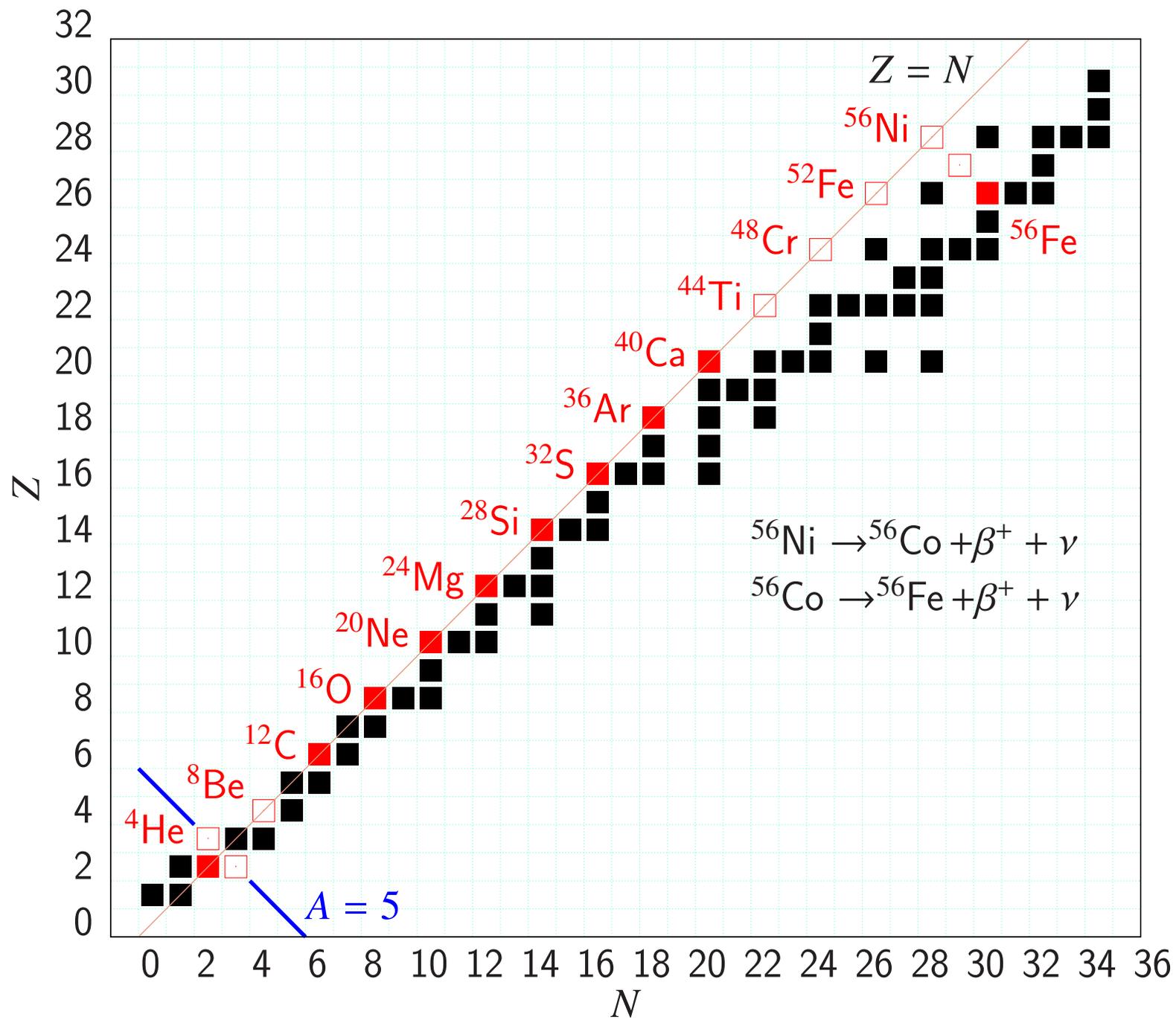
- ^{56}Fe es uno de los núcleos más abundantes en las estrellas. Es el producto final del “ciclo del Si”.

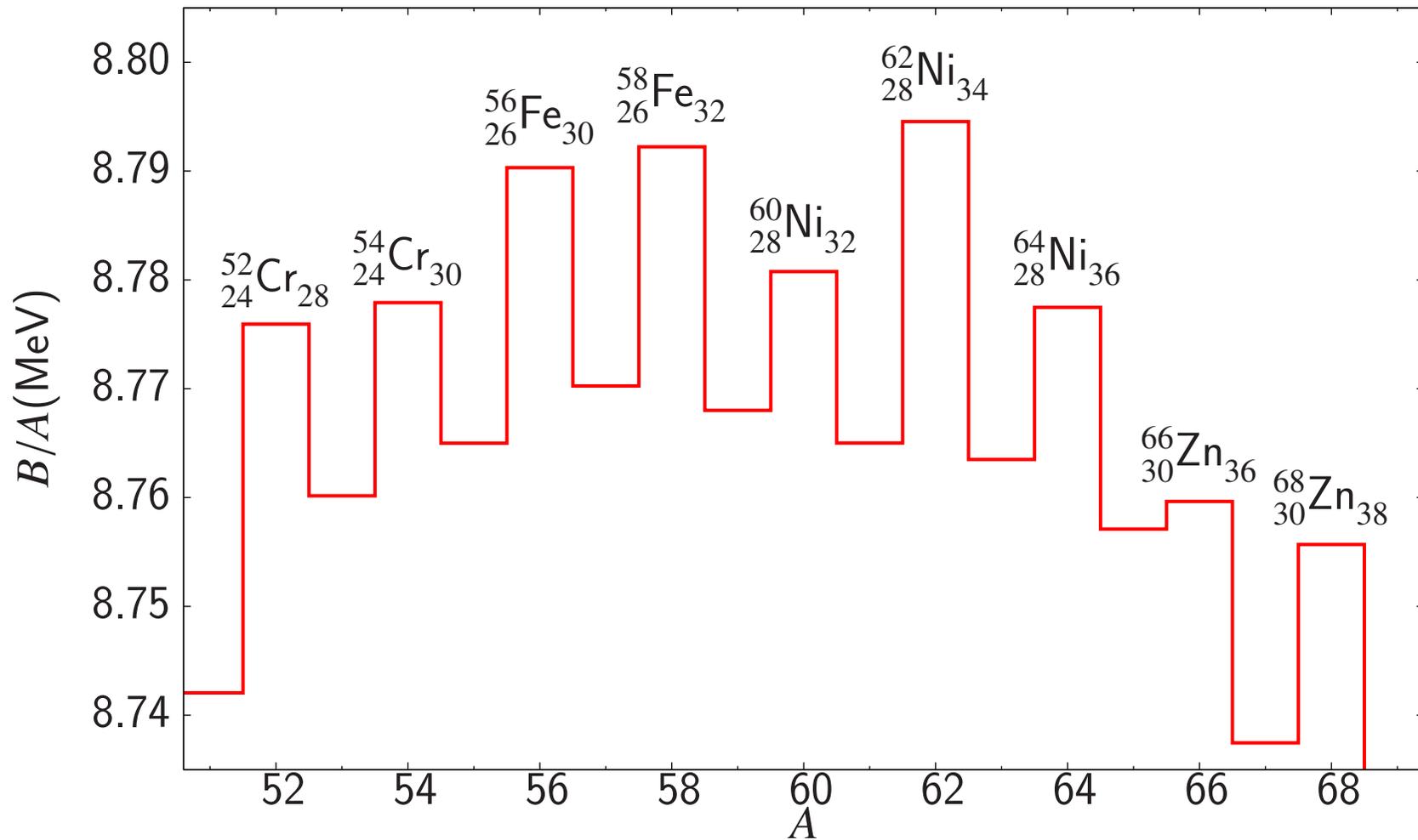
Uno de los caminos posibles: absorción consecutiva de partículas α :



y luego dos decaimientos β^+ :







- Razón de la abundancia del ^{56}Fe : es uno de los más fuertemente ligados.
- Pero... por la misma razón, por qué el más abundante no es ^{62}Ni ?

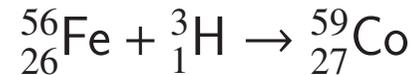
Dos opciones para obtener ^{62}Ni a partir de ^{56}Fe :

R. Shurtleff and E. Derringh, *The most tightly bound nucleus*, American Journal of Physics, **57**, 552 (1989).

Una sola reacción:

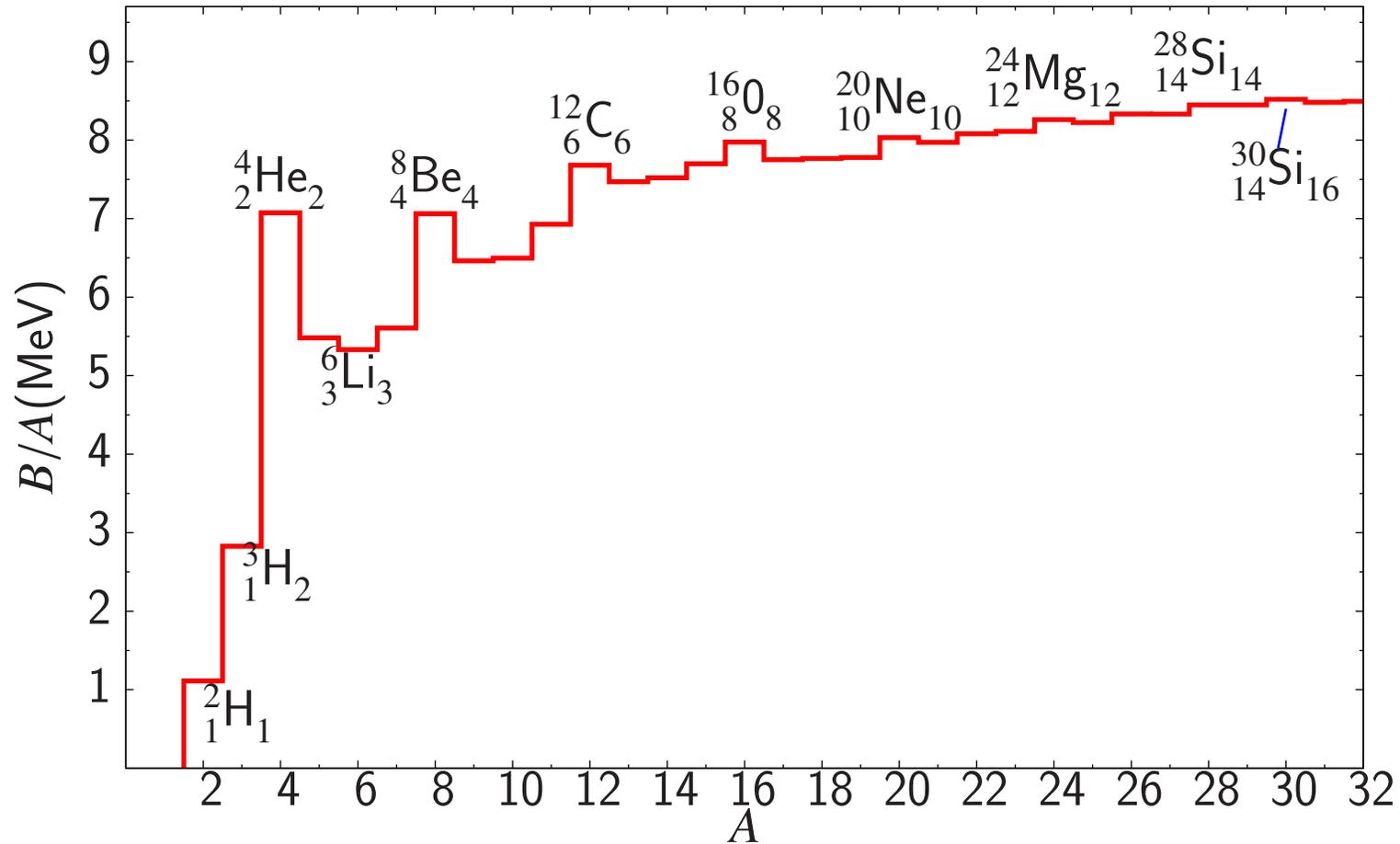


O la secuencia:

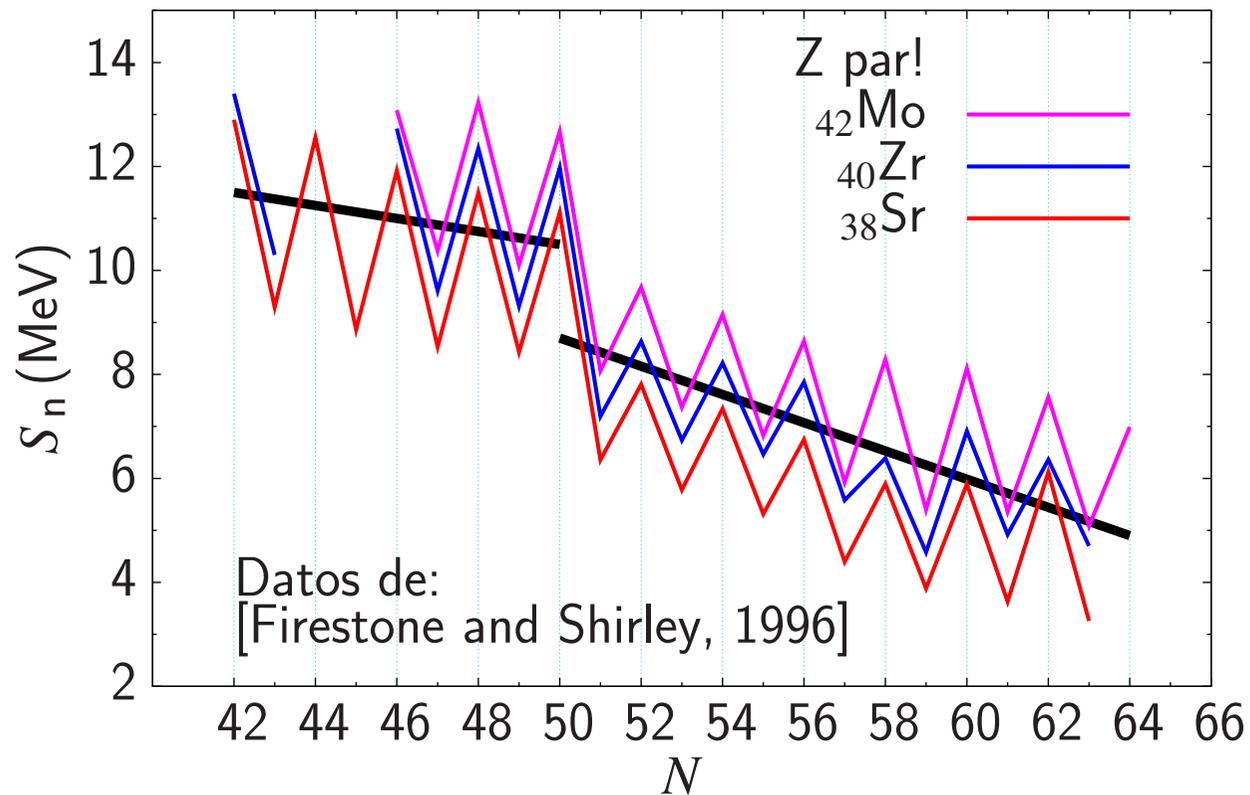


Pero ni ${}^6\text{He}$ ni ${}^3\text{H}$ (tritio) existen en las estrellas en las que el ciclo del silicio sucede.

2.4. Efectos par-impar (“pairing” ~ emparejamiento)



- Máximos para A par = N par + Z par. (Múltiplos de 4: ${}^4_2\text{He}_2$).
- Mínimos: A par = N impar + Z impar
- Valores intermedios: A impar = N par + Z impar, ó N impar + Z impar.

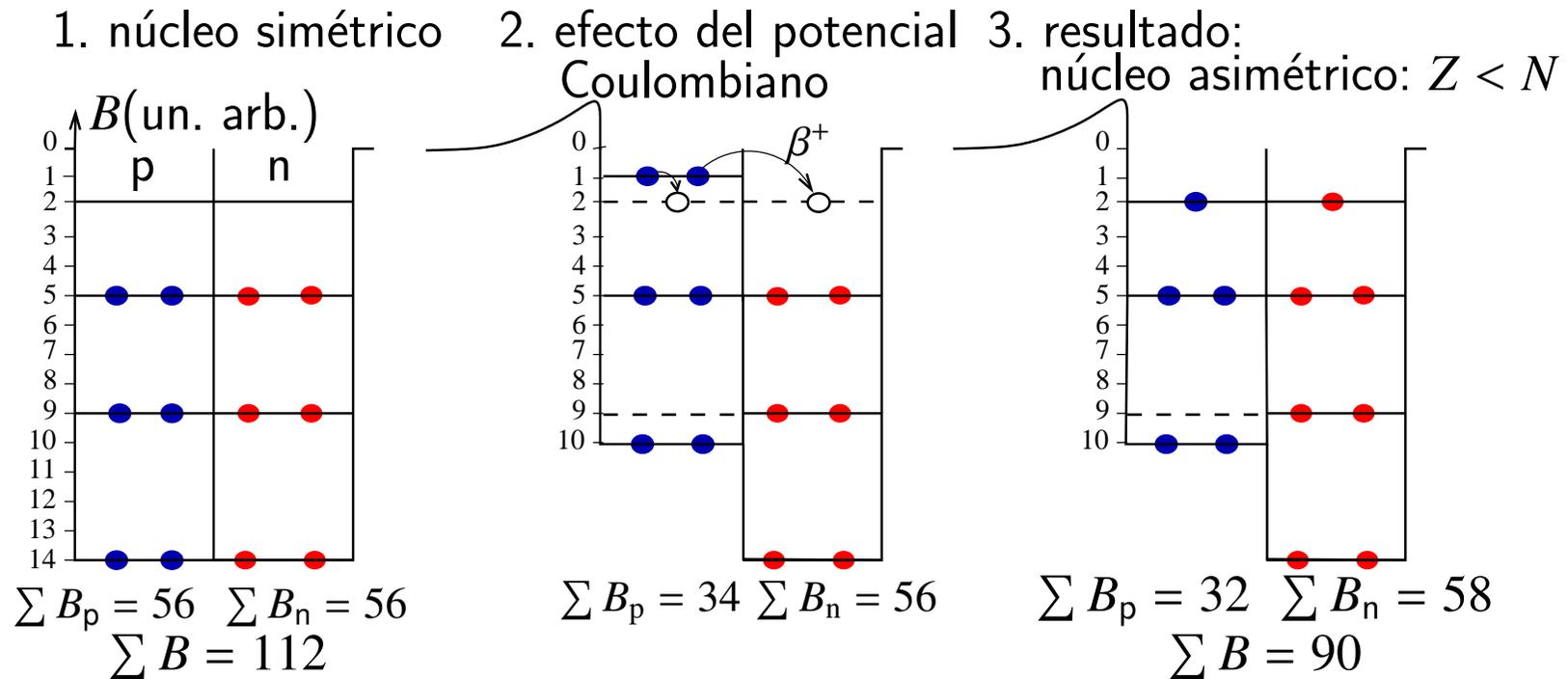


- Los máximos de S_n suceden en N par. Conclusión: Con Z fijo, el sistema de neutrones es más estable (más alta su energía de separación) cuando el número de neutrones es par.
- Hay un cambio en el promedio de S_n para $N < 50$ y $N > 50$.
- S_n presenta un cambio abrupto alrededor de $N = 50$.

2.5. Por qué $N > Z$ para los núcleos estables?

Los núcleos están compuestos de dos clases diferentes de fermiones!

- J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear* Dover (1991).
- Theo Mayer-Kuckuk, *Física Nuclear*, Fundação Calouste Gulbenkian, (1993), Lisboa.
- Carlos A. Bertulani, *Nuclear Physics in a Nutshell*, Princenton (2007).



Modelo de "Gas de Fermi" ...

Conclusión: $\Delta E_{a-s} \propto \frac{T_Z^2}{A}$

2.6. El modelo de gota cargada eléctricamente fermiónica binaria asimétrica

C. F. v. Weizsäcker, *Zur Theorie der Kernmassen*, Zeitschrift für Physik, **96**, 431 (1935)

El núcleo es considerado como una gota con las siguientes propiedades:

- El líquido es incompresible.
 - La gota es mantenida unida por medio de fuerzas de corto alcance.
 - Estas fuerzas se saturan.
1. Energía de condensación $\equiv B_1$: se libera cuando todos los nucleones son reunidos en el núcleo $\rightarrow B_1 \propto A$

$$B_1 = a_V A \quad V : \text{efecto de volumen}$$

2. Energía superficial $\equiv B_2$: Existen menos “ligaduras” actuando sobre un nucleón superficial que sobre uno en el interior de la materia nuclear.

$$|B_S| \propto \text{superficie} \propto R^2 \propto (A^{1/3})^2 = A^{2/3}$$

$$B_2 = -a_S A^{2/3}$$

3. Energía Coulombiana $\equiv B_3$. La energía almacenada en una esfera cargada con carga total Q , de radio R es $(3/5)Q^2/R$.

$$B_3 = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

4. Energía de asimetría $\equiv B_4$.

$$B_4 = -a_A \frac{T_Z^2}{A} = -a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A}$$

5. Energía de emparejamiento $\equiv B_5$.

$$B_5 = P(Z, A) = \begin{cases} 2\Delta_p & \text{par-par} \\ \Delta_p = 12A^{-1/2} & \text{par-impar; impar-par} \\ 0 & \text{impar-impar} \end{cases}$$

Resumen:

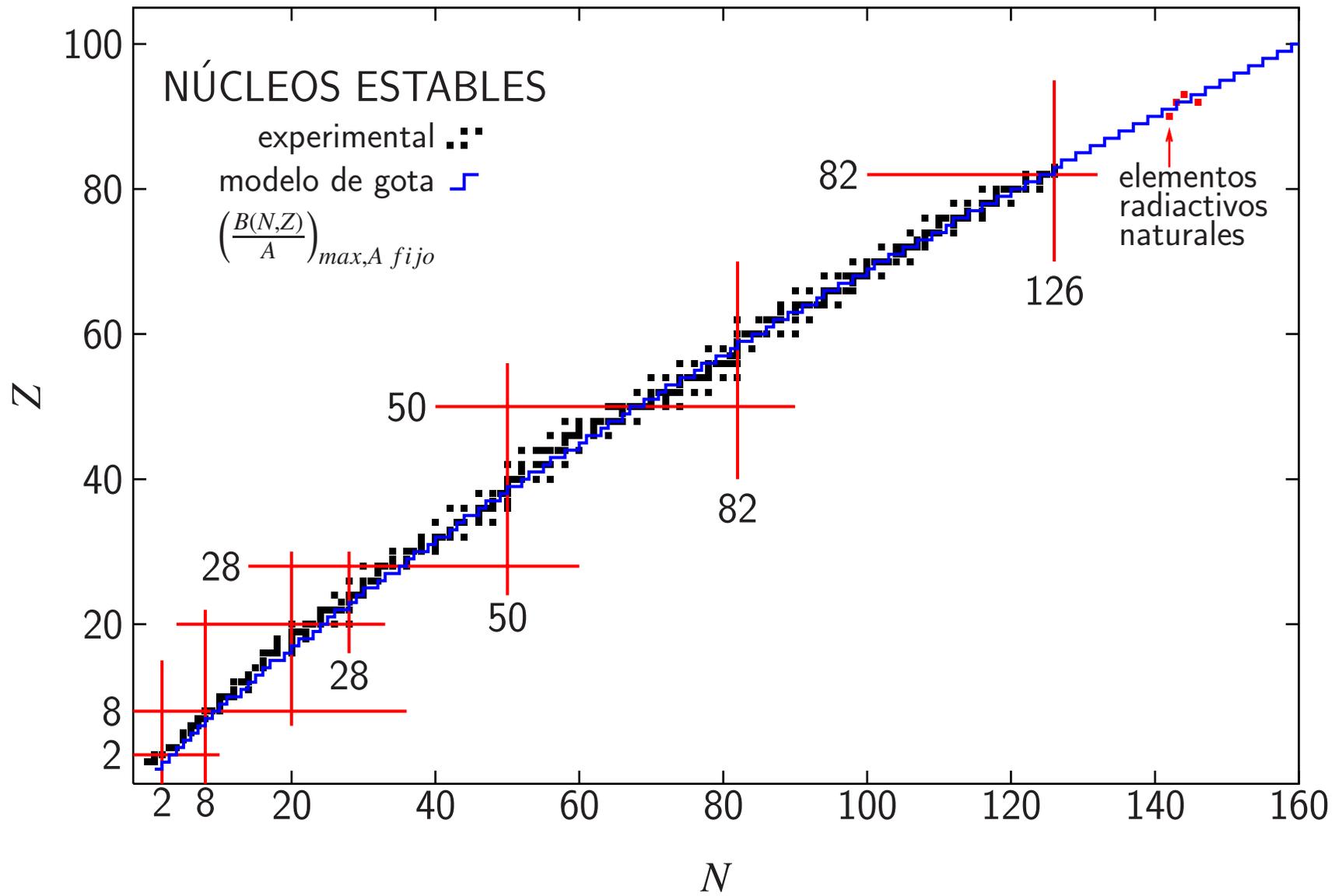
$$B(Z, A) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} + P(Z, A)$$

Los coeficientes son encontrados por ajuste a datos experimentales. Existen varios conjuntos de valores. Uno de ellos:

Todos los valores en MeV/c ² .			
a_V	a_S	a_C	a_A
15.85	18.34	0.71	92.86

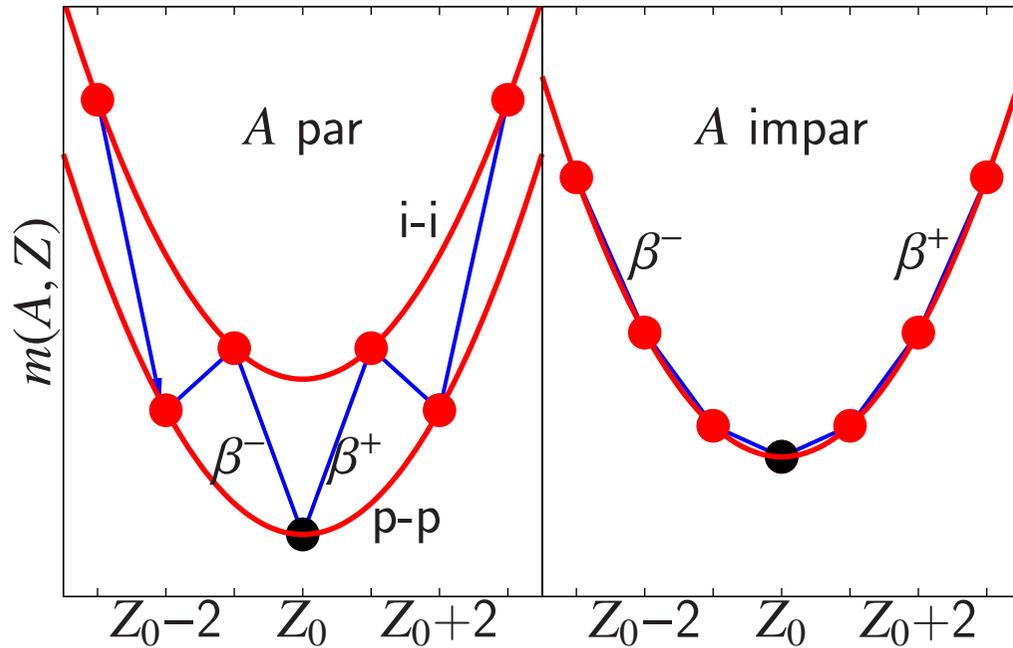
La misma expresión puede ser usada para calcular las masas \rightarrow fórmula de masa de Weiszacker = modelo de gota.

$$m(Z, N) = Zm(p) + Nm(n) - \frac{B(Z, A)}{c^2}$$



2.7. Consecuencias del modelo de gota. La estabilidad del núcleo

Decaimiento beta



- La dependencia de la masa con Z es parabólica:

$$m(Z, A) = m(Z^2, A)$$

$\equiv A$ fija, parábola
como función de Z

- Se originan tres familias de parábolas:
 - A par:
 1. Z par, N par (p-p).
 2. Z impar, N impar (i-i).
 - A impar:
 3. Z impar, N par; Z par, N impar.

Probabilidad de decaimiento β : Si es energéticamente posible, sucede.

■ Decaimiento alfa

$$[m(Z - 2, A - 4) + m(\alpha) - m(Z, A)]c^2 = S_\alpha$$

■ Fisión

$$m_f = m_1 + m_2, \quad Q = (m_i - m_f)c^2 = T_f - T_a$$

Supongamos fisión en dos partes iguales.

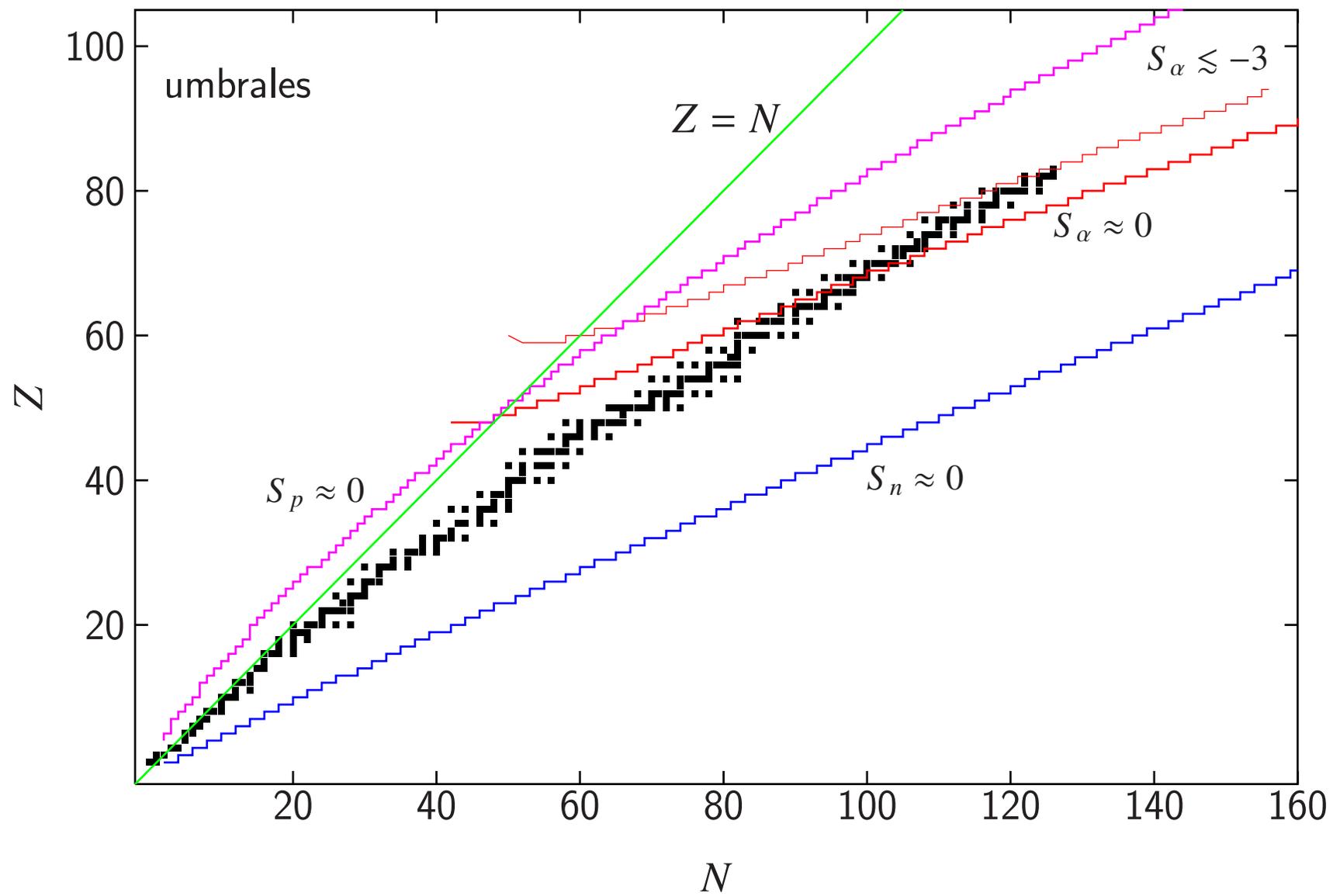
$$\frac{E_f}{c^2} = m(Z, A) - 2 \cdot m(Z/2, A/2)$$

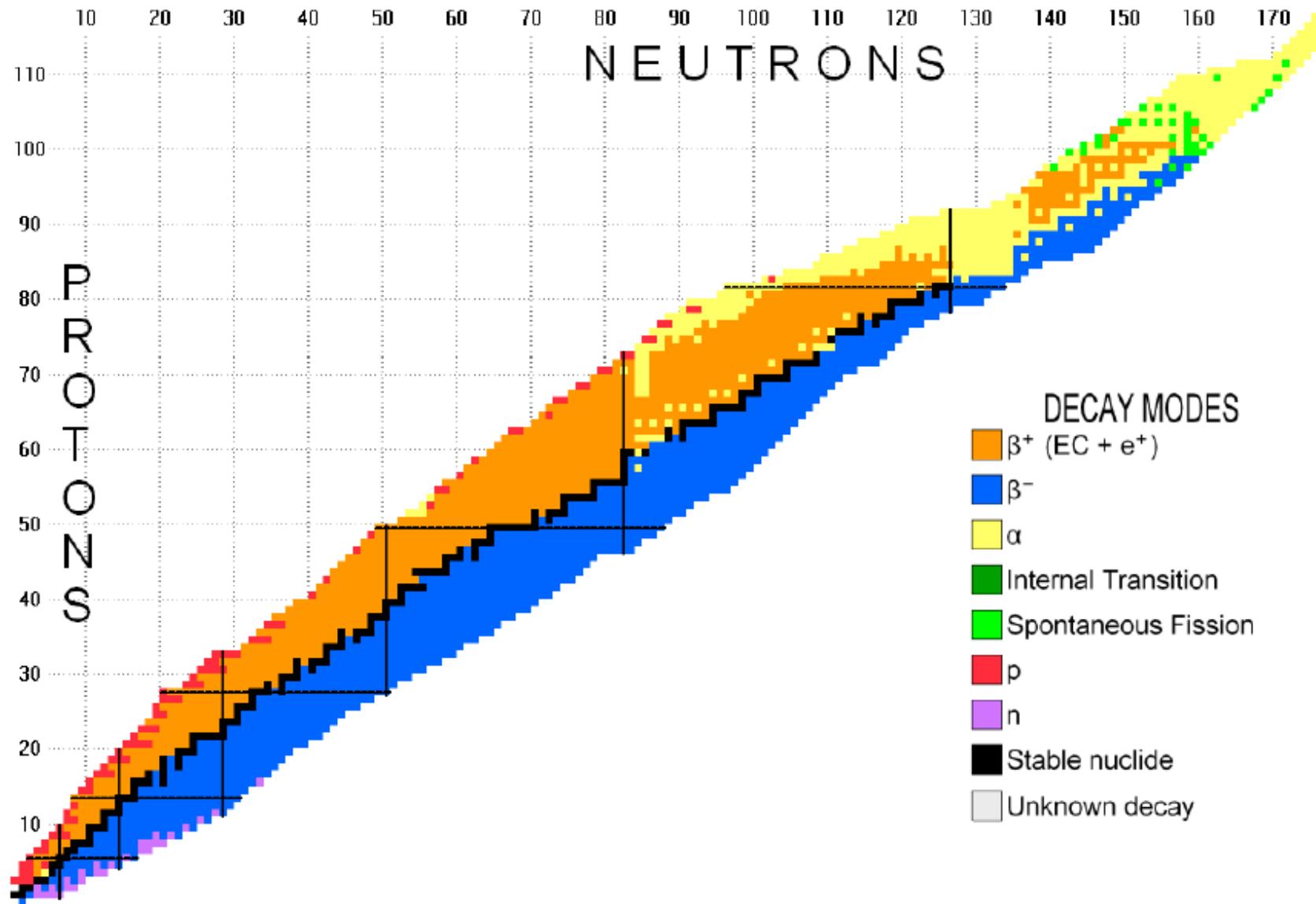
■ Decaimientos protónico y neutrónico

- No es observado para núcleos en o cerca de la línea de estabilidad.
- $E_p, E_n > 0$ ($S_p, S_n < 0$) tan sólo para núcleos muy lejos de la línea de estabilidad.

Atención!

- Estas “cuentas” muestran solamente para qué valores de (A, Z) la emisión de partículas –incluyendo fisión– es posible energéticamente (produce ganancia de energía).
- **NO** dicen si la transición tiene lugar en efecto.
- ¿Tiene lugar la transición? Respuesta: Examinar probabilidades de transición: $|\langle f|\hat{O}|i\rangle|^2$.





G. Audi et al., Nucl. Phys. **A729**, 3 (2003). *The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties.*

NUBASE = datos experimentales de 3177 núclidos.

3. **Cantidades cuánticas en el núcleo**

3.1. Espín

I = momento angular total = espín del núcleo

ℓ_i = momento angular cinético del nucleón i

s_i = espín del nucleón i

$$I = \sum_{i=1}^A (\ell_i + s_i)$$
$$s_p = s_n = \frac{1}{2}\hbar$$
$$\ell = 0, 1, 2, \dots$$
$$\longrightarrow \begin{cases} A \text{ par} & I = 0, 1, 2, \dots \\ A \text{ impar} & I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \end{cases}$$

¿Cómo se determina I en los núcleos? R: Efectos magnéticos: $I \rightarrow \mu_I$

→ interacción magnética (capas electrónicas) ↔ (momento magnético del núcleo)

= “estructura hiperfina” de las líneas espectrales atómicas.

↑ origen: acople de los momentos angulares nuclear y atómico:

J = momento angular total atómico

$$F = I + J$$

Tres diferentes técnicas para investigar el valor de I (temas de física atómica):

1. Conteo del número de componente de la estructura hiperfina, o sea número de componentes de F :

$$\underbrace{|I - J|, |I - J| + 1, \dots, |I + J| - 1, |I + J|}$$

$2I + 1$ componentes si $I \leq J$

$2J + 1$ componentes si $I > J$

2. Medición de la diferencia energética entre los niveles de la estructura hiperfina:

$$\Delta E = -\frac{\mu_I \mu_J B_0}{2IJ} [F(F + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)]$$

$B_0 =$ campo magnético atómico en la posición del núcleo

3. Desdoblamiento de las líneas de la estructura hiperfina en un campo magnético.

Lo que se observa experimentalmente:

Tipo de núcleo	I del estado base
par - par	0
par-impar	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ Valores más grandes son raros: en ${}^{125}_{50}\text{Sn}_{75}$ $I = \frac{11}{2}$
impar-impar	$I < 5$ Excepción: ${}^{176}_{71}\text{Lu}_{105}$, $I = 7$

3.2. Paridad

En un sistema gobernado por la ecuación de Schrödinger, ¿qué les sucede a los sistemas al ser alterados por **inversión**: $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$?

$$\left[-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0.$$

Si $\Psi(\mathbf{r})$ es solución, también lo es $\Psi(-\mathbf{r})$. Relación entre ellas: la **operación de paridad** \hat{P} :

$$\hat{P}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r}).$$

Si $\Psi(-\mathbf{r})$ es también una solución

$$\Psi(-\mathbf{r}) = \pi\Psi(\mathbf{r}).$$

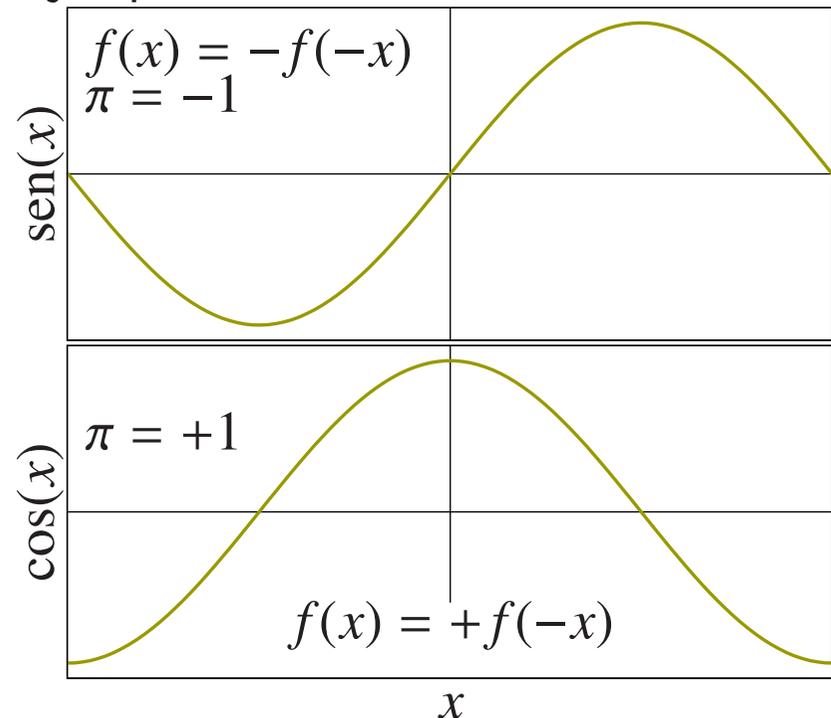
Una segunda operación de paridad sobre $\Psi(\mathbf{r})$ debe producir la función original:

$$\hat{P}\hat{P}\Psi(\mathbf{r}) = \hat{P}\Psi(-\mathbf{r}) = \pi\hat{P}\Psi(\mathbf{r}) = \pi^2\Psi(\mathbf{r})$$

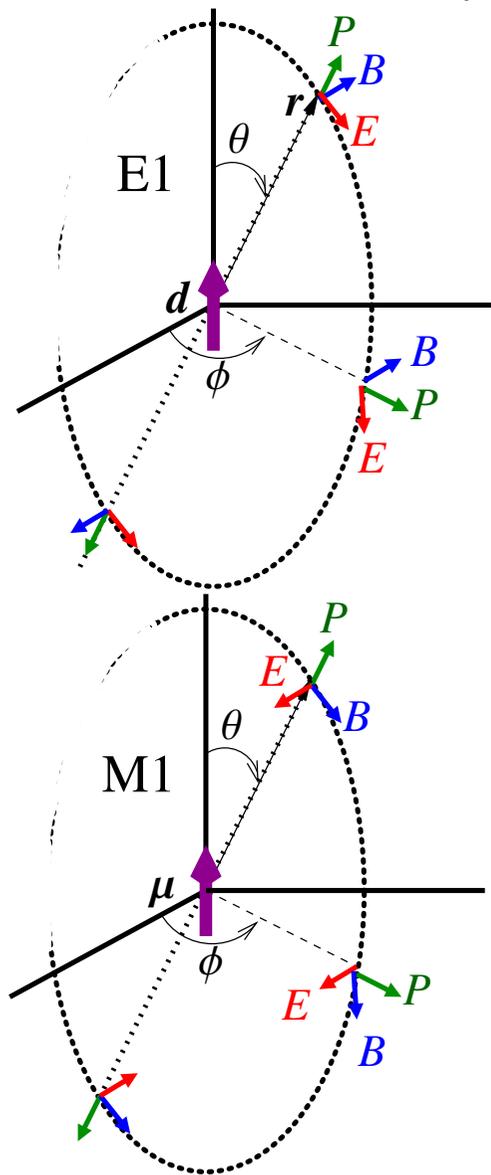
$$\pi^2\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \pi^2 = 1$$

$$\pi = \begin{cases} 1 & : \text{función par} \\ -1 & : \text{función impar} \end{cases}$$

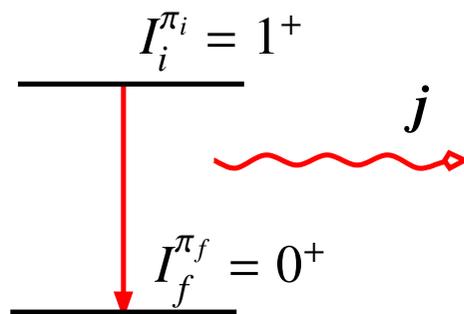
Ejemplos triviales en una dimensión:



Radiación dipolar en una onda H. Morinaga and T. Yamazaki, *In-Beam Gamma-ray Spectroscopy*, North Holland, (1976) Ilustración del significado de la paridad.



Paridad del multipolo eléctrico de orden $j = (-1)^j$
 Paridad del multipolo magnético de orden $j = -(-1)^j$



$$|I_i - I_f| \leq j \leq |I_i + I_f|$$

$$1 \leq j \leq 1 \longrightarrow j = 1$$

$$\pi_i = \pi_f \cdot \pi(Xj)$$

$$(+1) = (+1) \cdot (+1)$$

$$\rightarrow \pi(Xj) = +1$$

$$\pi(Xj) = \begin{cases} (-1)^j = -1 & \text{para } X=E \\ (-1)^{j+1} = +1 & \text{para } X=M \end{cases}$$

3.3. Momentos magnéticos

La presencia de momentos magnéticos en el sistema cambia su energía: $U_{\text{mag}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$

- La definición clásica de momento magnético involucra una corriente eléctrica I_{el} que circunda cierta área a :

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I_{el} \times \mathbf{a}}{c}$$

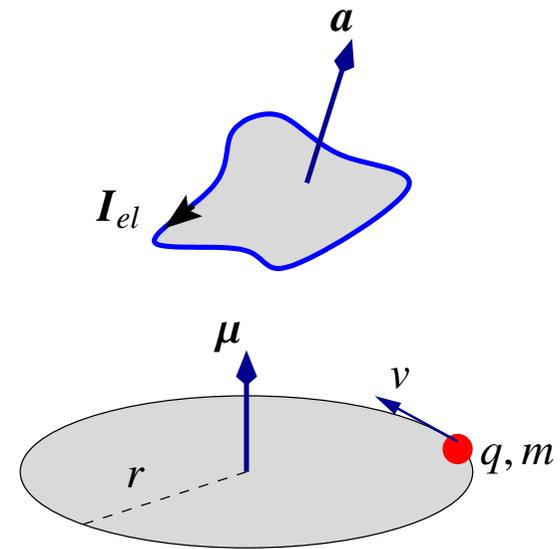
- Una partícula cargada en un órbita circular de radio r moviéndose a velocidad v produce una corriente eléctrica

$$I_{el} = \frac{qv}{2\pi r}; \quad a = \pi r^2$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\mu} = \frac{qvr}{2c}.$$

- Relación momento magnético \leftrightarrow momento angular cinético:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow L = mvr \rightarrow \boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}; \quad \text{Cuánticamente: } L = \hbar \ell \rightarrow \boldsymbol{\mu} = \frac{q\hbar}{2mc} \boldsymbol{\ell}$$



En el átomo:

\mathbf{J} = momento angular total

$$\boldsymbol{\mu} = g\mu_B\mathbf{J}$$

$g \equiv$ factor giromagnético

$\mu_B =$ magnetón de Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0.58 \times 10^{-4} \frac{\text{eV}}{\text{tesla}}$$

$$\mu_\ell = g_\ell \cdot \mu_B \ell, \quad \mu_s = g_s \cdot \mu_B s$$

electrón	
g_ℓ	g_s
1	2.00232

En el núcleo:

\mathbf{I} = espín del estado

$$\boldsymbol{\mu}_I = g_I\mu_N\mathbf{I}$$

$\mu_N =$ magnetón nuclear

$$\begin{aligned} \mu_N &= \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3.25 \times 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{\text{tesla}} \\ &= 0.33 \times 10^{-7} \frac{\text{eV}}{\text{tesla}} \end{aligned}$$

$$\mu_\ell = g_\ell \cdot \mu_N \ell, \quad \mu_s = g_s \cdot \mu_N s,$$

nucleones			
	g_ℓ	g_s	μ
p	1	5.59	2.79
n	0	-3.83	-1.91

EC: Anómalos!

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}, \quad 1 \text{ gauss} = ?$$

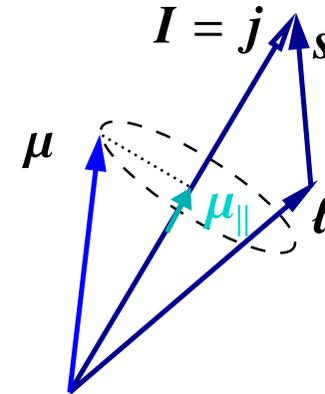
- Para **una partícula** con espín intrínseco:

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s}$$

El momento magnético no es un vector en la dirección de \mathbf{j} pues tiene factores de multiplicación diferentes en $\boldsymbol{\ell}$ y \mathbf{s} :

$$\boldsymbol{\mu} = \underbrace{g_{\ell}\mu_N}_{g_{\ell}} \boldsymbol{\ell} + \underbrace{g_s\mu_N}_{g_s} \mathbf{s}$$

$$\boldsymbol{\mu} = g_{\ell}\boldsymbol{\ell} + g_s\mathbf{s}; \quad g_{\ell}, g_s \text{ en unidades de } \mu_N.$$



- Qué es g_I si $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{I} no son paralelos?

Definimos

$$\mu_I \equiv \mu_{\parallel} = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{I}}{I} \cdot \frac{I}{I}$$

De esta manera

$$g_I = \frac{\mu_I}{I}$$

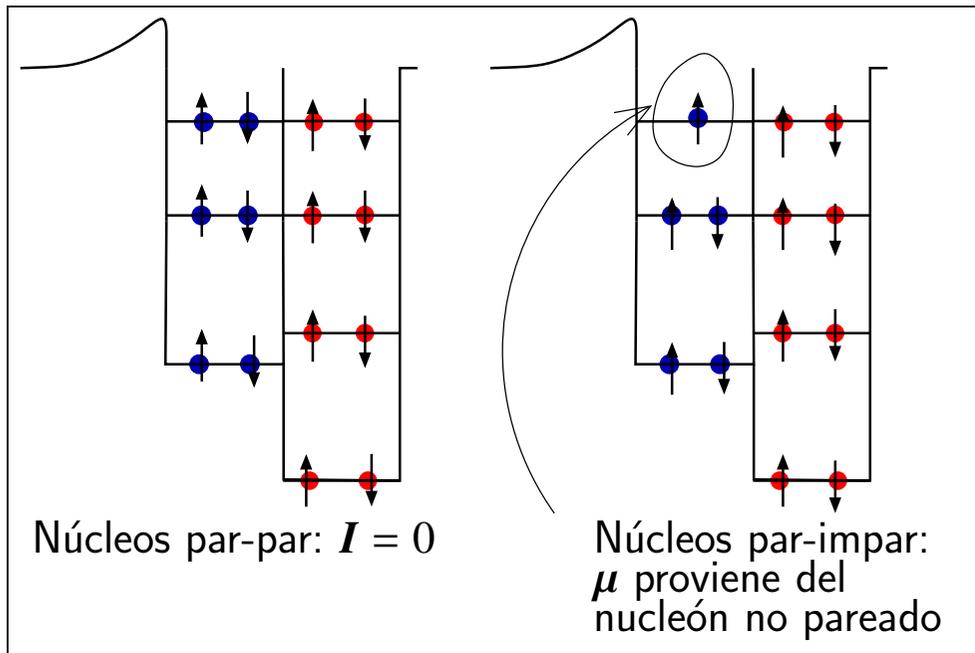
Recordar que cuánticamente:

$$I = \frac{\max I_z}{\hbar}; \quad \mu = \frac{\max \mu_z}{\mu_N}$$

$$\langle \hat{O}_z \rangle = \langle m = I | \hat{O} | m = I \rangle$$

$$\rightarrow \mu = \langle m = I | \hat{\boldsymbol{\mu}} | m = I \rangle$$

¿Si los nucleones se comportan como **partículas no interactuantes** en el núcleo, cuál será el valor de $\mu_I \equiv \mu$ en los estados nucleares? R: las “líneas de Schmidt” [Th. Schmidt, *Über die magnetischen Momente der Atomkerne*, Zeitschrift für Physik A, **106**, 358 (1937)]



$$I \equiv j = \ell + s$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mu \cdot j}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{1}{j^2} (\mu \cdot j) j = g j \\ &= \frac{1}{j^2} [(g_l \ell + g_s s) \cdot j] j = \frac{1}{j^2} [g_l \ell \cdot j + g_s s \cdot j] j \\ \therefore g &= \frac{1}{j^2} [g_l \ell \cdot j + g_s s \cdot j] \end{aligned}$$

¿Cómo se calculan $\ell \cdot j$ y $s \cdot j$?

$$s = j - \ell \rightarrow s^2 = j^2 + \ell^2 - 2j \cdot \ell \quad \therefore \quad \ell \cdot j = \frac{1}{2}(j^2 + \ell^2 - s^2)$$

$$\ell = j - s \rightarrow \ell^2 = j^2 + s^2 - 2j \cdot s \quad \therefore \quad s \cdot j = \frac{1}{2}(j^2 + s^2 - \ell^2)$$

$$g = \frac{1}{2j(j+1)} \{g_l [j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)] + g_s [j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)]\}$$

$$s = \frac{1}{2}; \quad j = \ell \pm \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{g = g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2\ell + 1}}$$

Dos casos en el cálculo de $g(j)$, ($j = \ell \pm 1/2 \rightarrow \ell = j \mp 1/2$):

p no emparejado

$$g_{(p)} = g_{\ell,p} \pm \frac{g_{s,p} - g_{\ell,p}}{2\ell + 1} = 1 \pm \frac{5.59 - 1}{2\ell + 1}$$

$$g_{(p)} = \begin{cases} 1 + \frac{4.59}{2j}, & j = \ell + 1/2 \\ 1 - \frac{4.59}{2(j+1)}, & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

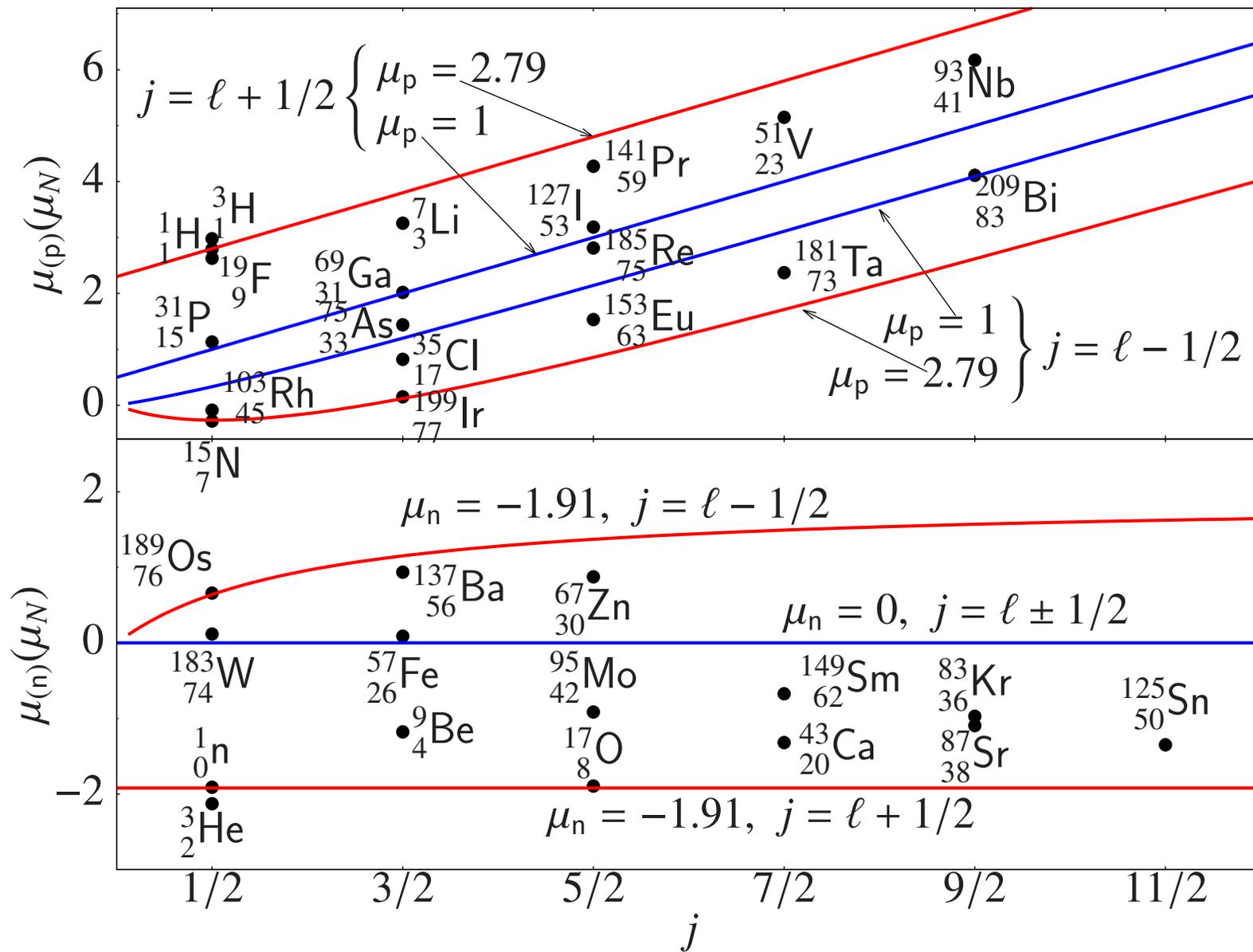
$$\mu_{(p)} = g_{(p)}j = \begin{cases} j + 2.3 & j = \ell + 1/2 \\ j - \frac{2.3}{1+1/j} & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

n no emparejado:

$$g_{(n)} = g_{\ell,n} \pm \frac{g_{s,n} - g_{\ell,n}}{2\ell + 1} = 0 \pm \frac{-3.83}{2\ell + 1}$$

$$g_{(n)} = \begin{cases} \frac{3.83}{2j}, & j = \ell + 1/2 \\ \frac{3.83}{2(j+1)}, & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

$$\mu_{(n)} = g_{(n)}j = \begin{cases} -1.92, & j = \ell + 1/2 \\ \frac{1.92}{1+1/j}, & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$



Desviaciones experimentales de la predicción del modelo de partícula aislada... probables razones:

- ¿Polarización del resto del núcleo?
- ¿ $g_{n,p}$ dentro del núcleo $\neq g_{n,p}$ de n, p libres?

3.4. Momentos eléctricos

3.4.1. La expansión en multipolos

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \int \rho(r') d^3 r' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta \rho(r') d^3 r' + \frac{1}{r^3} \int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(r') d^3 r' + \dots$$

[Purcell, 1980, p. 310]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} q_{\ell m} \frac{Y_{\ell m}}{r^{\ell+1}}, \quad [\text{Jackson, 1975, p. 136}]$$

mejor conocidos como...

momento dipolar eléctrico:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

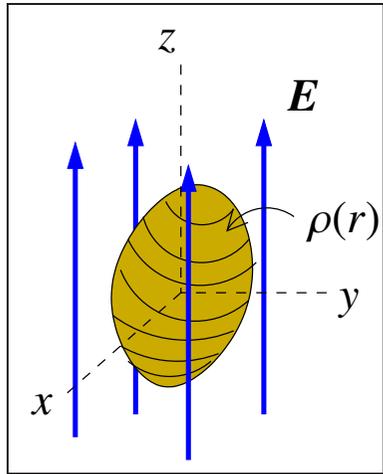
tensor momento cuadrupolar:

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d^3 r', \quad x_i, x_j = x', y', z'$$

... la expansión en multipolos:
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots$$

3.5. Los multipolos eléctricos nucleares

John M. Blatt and Victor F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Dover, (1991). Sec. I.7.A



- Supongamos un núcleo en una región con $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ constante.
- \mathbf{E} podría provenir de los electrones en el átomo.

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\text{átomo}} \frac{\rho_{el}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

- Taylor alrededor del origen del sistema de coordenadas:

$$\phi(x, y, z) = \phi(0) + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial z}}_{-E_z(0)} z$$

¿Cuál es el efecto de este campo (potencial) externo sobre la energía del núcleo?

$$\rho(\mathbf{r}) = \text{densidad de carga nuclear} \quad U = \int_{\text{núcleo}} \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3 r$$

$$\begin{aligned}
U &= \int \phi(0)\rho(\mathbf{r}) d^3r - \int E_z(0) \cdot z \cdot \rho(\mathbf{r}) d^3r \\
&= \phi(0) \int \rho(\mathbf{r}) d^3r - E_z(0) \int z \cdot \rho(\mathbf{r}) d^3r \\
&= \phi(0)(Ze) - E_z(0)p_z
\end{aligned}$$

con la componente z del momento dipolar eléctrico

$$\begin{aligned}
p_z &= \sum_{i=1}^Z \int e \underbrace{z_i}_{\text{impar}} \underbrace{|\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A)|^2}_{\text{par}} d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_A \\
\int_{\text{dominio}} (\text{par} \times \text{impar}) dV &\equiv 0 \quad \therefore \quad p_z \equiv 0.
\end{aligned}$$

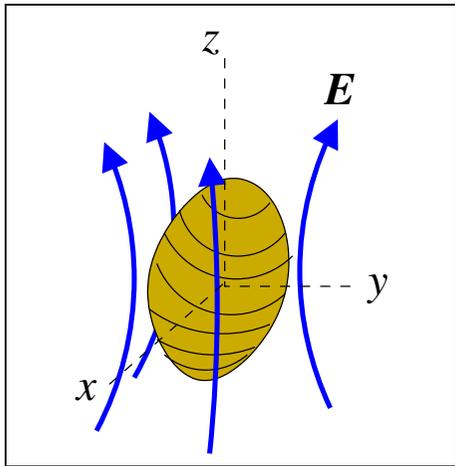
Conclusiones

- Sistemas mecanocuánticos en estados **estacionarios** no poseen momentos dipolares **permanentes**.
- Experimental: Un campo eléctrico espacialmente constante sobre el volumen nuclear no da información alguna.

Qué sucede en un campo espacialmente variable?

- Supongamos un campo cilíndricamente simétrico alrededor del eje z .

$$E_z = E_z(z = 0) + \left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=0} \cdot z$$



- El efecto de un campo eléctrico constante no tiene trascendencia
→ para facilitar cálculos vamos a suponer

$$E_z(z = 0) = 0, \\ \therefore E_z = K \cdot z$$

- Las fuentes del campo eléctrico son externas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

- Para que la divergencia sea nula y a la vez tenga simetría cilíndrica:

$$E_x = -\frac{1}{2}Kx, \quad E_y = -\frac{1}{2}Ky$$

Nos interesa el potencial:

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int E_x dx - \int E_y dy - \int E_z dz \\ &= -\frac{1}{4}K(-x^2 - y^2 + 2z^2) \quad [x^2 + y^2 + z^2 = r^2] \\ &= -\frac{1}{4}K(3z^2 - r^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U &= \int_{\text{núcleo}} \phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) d^3r \\ &= -\frac{1}{4}K \int_{\text{núcleo}} (3z^2 - r^2)\rho(x, y, z) d^3r \\ &= -\frac{1}{4}K Q_{\text{núcleo}}\end{aligned}$$

$Q_{\text{núcleo}}$ = momento cuadrupolar intrínseco nuclear

$$U = -\frac{1}{4} \left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_0 \cdot Q_{\text{núcleo}} \equiv \text{Interacción hiperfina eléctrica}$$

Esta interacción modifica las posiciones relativas de las energías de las componentes de un multiplete. Veremos un ejemplo en la p. 64.

$$Q(\Psi) = \sum_{i=1}^Z \int e \underbrace{(3z_i^2 - r_i^2)}_{\text{par}} \underbrace{|\Psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_A)|^2}_{\text{par}} d^3 r' \begin{cases} \neq 0 \text{ en general.} \\ = 0 \text{ puede serlo.} \end{cases}$$

Conclusión: La paridad no impide que el sistema (núcleo) tenga un momento cuadrupolar permanente (estático).

El caso trivial: distribución esférica de carga

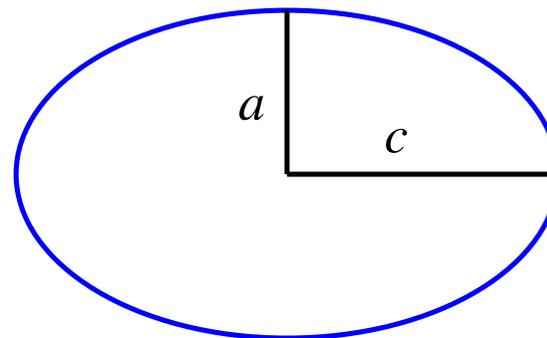
$$Q = \int_{\text{volumen}} \underbrace{(3z^2 - r^2)}_{\text{par}} \underbrace{e\rho_0}_{\text{par}} d^3 r = \int r^2(3 \cos^2 \theta - 1) e\rho_0 d^3 r = e\rho_0 \int r^2(3 \cos^2 \theta - 1) d^3 r$$

$$= e\rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta = 0.$$

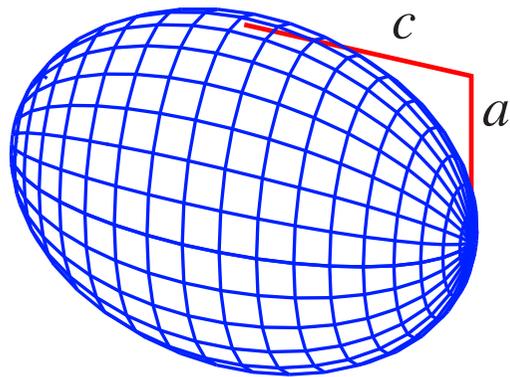
$$\int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta = (\cos^3 \theta + \cos \theta) \Big|_0^\pi = -2 + 2 = 0$$

Caso no trivial sencillo: elipsoide de revolución

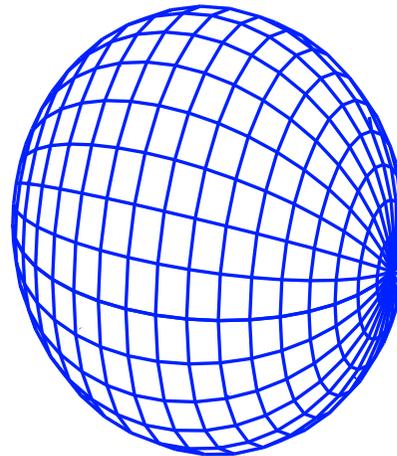
$$Q = \frac{2}{5}(c^2 - a^2) Ze$$



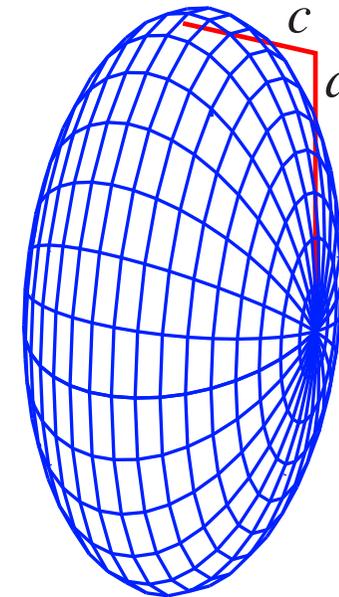
Los casos de deformación más sencillos: simetría axial



prolato: $Q > 0$



esfera: $Q = 0$



oblato: $Q < 0$

$$Q = \frac{2}{5}(c^2 - a^2)Ze; \quad [c^2 - a^2 = 2\frac{c+a}{2}(c-a) = 2\bar{R}\Delta R = 2\bar{R}^2\frac{\Delta R}{\bar{R}}$$

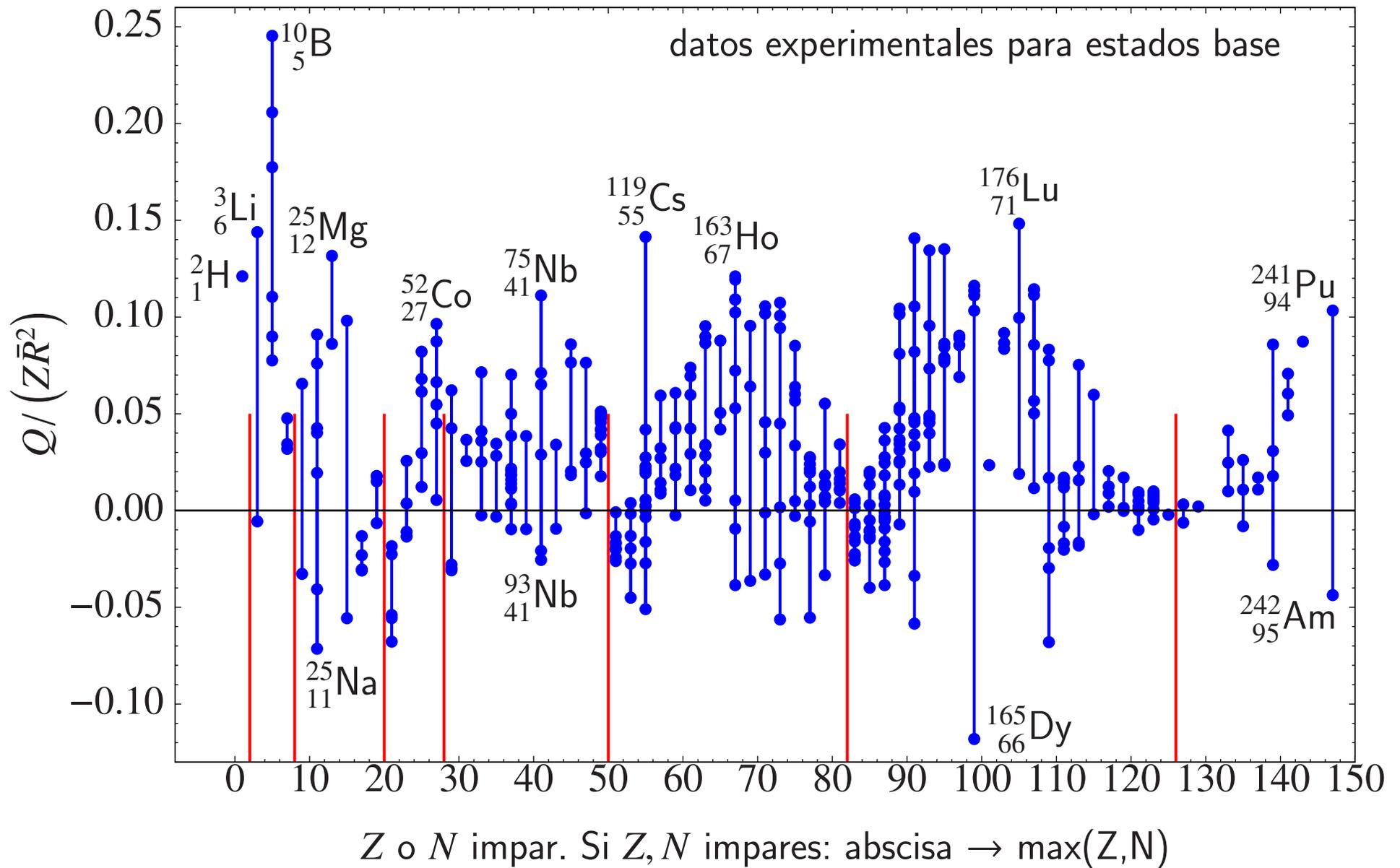
$$Q = \frac{4}{5}Ze\bar{R}^2\frac{\Delta R}{\bar{R}} = \frac{4}{5}Ze\bar{R}^2\delta; \quad \delta \sim \text{medida de la deformación}$$

$$\delta = \frac{5}{4}\frac{Q}{Ze\bar{R}^2}$$

Unidades de Q/e : [área]

$$[Q_{\text{nuclear}}/e] = \text{b} \equiv \text{barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$(1 \text{ fm})^2 = (10^{-15} \text{ m})^2 = (10^{-13} \text{ cm})^2 = 10^{-26} \text{ cm}^2 = 10^{-2} \text{ b}$$



Valores de $Q(b)$: R. B. Firestone and V. S. Shirley, *Table of Isotopes*, John Wiley, Vol. II (1996). Appendix E.

Sobre la gráfica en la página anterior:

- Ordenada: $Q(b)$, $\bar{R} = r_0 A^{1/3}$
- Los núcleos con (N, Z) cercanos a los números mágicos tienen las deformaciones más pequeñas.
- Los núcleos con (N, Z) intermedios entre números mágicos tienen las deformaciones más grandes.
- Especialmente claro para $(Z, N) > 50$: la envolvente se cierra en 50, 82, 126.
- Interesante: Q grande (inmenso) sin cumplir el punto anterior: ^{119}Cs .
- La naturaleza parece preferir deformación prolata: son más numerosos los casos con $Q > 0$.

3.6. La relación $Q \leftrightarrow I$

Teorema: Un núcleo puede tener $Q \neq 0$ solamente si $I \geq 1$.

$$Q(\Psi) = \sum_{i=1}^Z \int e(3z_i^2 - r_i^2) |\Psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_A)|^2 d^3 r'$$

Tomemos el protón 1:

$$Q(|I\rangle) = \int \Psi_I^* [e(3z_1^2 - r_1^2)\Psi_I] d^3 r$$

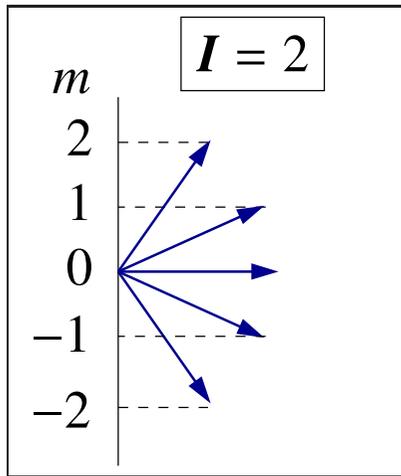
$$3z^2 - r^2 = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{\ell=2}^{m=2}(\theta, \phi); \quad \hat{L}^2 Y_{\ell}^m = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m$$

$$\underbrace{[(3z_1^2 - r_1^2)]}_{J=2} \underbrace{[\Psi_I]}_{J=I} = F = \sum_{J=|I-2|}^{|I+2|} F_j$$

- $I = 0 \rightarrow F = F_{J=2}; \quad Q(|I = 0\rangle) = \int \Psi_{I=0}^* F_{J=2} dV \underbrace{=}_{\text{ortogonalidad}} 0$
- $I = \frac{1}{2} \rightarrow F = F_{3/2} + F_{5/2}; \quad Q(|I = 1/2\rangle) = \int \Psi_{I=1/2}^* [F_{J=3/2} + F_{5/2}] dV = 0$
- $I = 1 \rightarrow F = F_1 + F_2 + F_3; \quad Q(|I = 1\rangle) = \int \Psi_{I=1}^* [F_{J=1} + F_{J=2} + F_{J=3}] dV = 0$

Corolario: La ley de composición de momentos angulares implica que el multipolo eléctrico de orden (par) ℓ se anula a menos que el momento angular I de la función de onda cumpla $I \geq \ell/2$.

3.7. Q y la orientación del núcleo



- $|I\rangle$ tiene $2I + 1$ orientaciones.
- Q tendría $(2I + 1)$ valores diferentes.
- ¿Cuál valor usamos para $Q(|I\rangle)$?
- Vamos a mostrar que los valores de Q para diferentes orientaciones tienen relación entre sí...

Clásicamente: $Q = \int (3z^2 - r^2)\rho(x, y, z) dV$

Coordenadas cilíndricas: $Q(\rho) = \int r^2(3 \cos^2 \theta - 1)\rho(x, y, z) d^3 r$

¿Cómo depende $Q(\rho)$ de β ?

(r, θ, φ) alrededor de $z \rightarrow (r, \theta', \varphi')$ alrededor de z' .

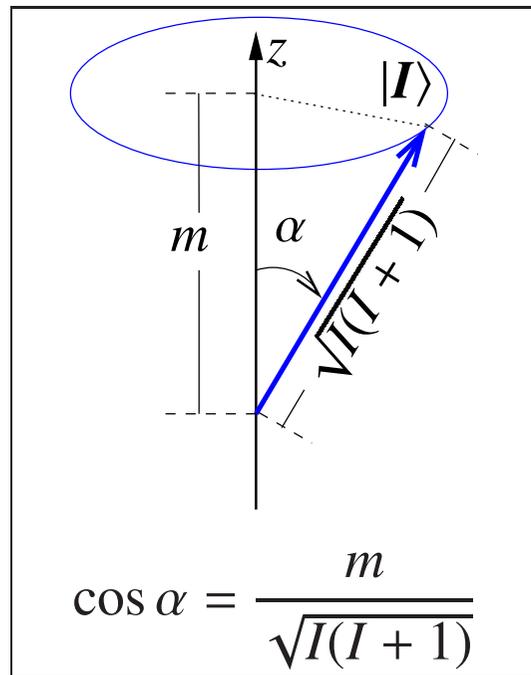
Si el eje de simetría está a lo largo de $(\theta, \varphi) = (\beta, \phi)$:

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \beta + \sin \theta' \sin \beta \cos(\varphi - \phi)$$

$$Q(\rho, \beta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \beta - 1)Q_0(\rho), \quad Q_0(\rho) = \int r'^2(3 \cos^2 \theta' - 1)\rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

$Q_0(\rho)$ = cuadrupolo cuando z' está a lo largo del eje de simetría del núcleo

La orientación del momento angular \mathbf{I} con respecto al eje z está especificada por el valor de su componente m :



Combinación de ideas clásicas y cuánticas: los momentos cuadrupolares en los estados $|I m_1\rangle$ e $|I m_2\rangle$ deberían tener las mismas relaciones matemáticas que aquellas entre los valores de $Q(\rho, \beta_1)$ y $Q(\rho, \beta_2)$...

$$\begin{aligned} \frac{Q(|I m_1\rangle)}{Q(|I m_2\rangle)} &= \frac{Q(I, m_1)}{Q(I, m_2)} = \frac{3 \cos^2 \alpha_1 - 1}{3 \cos^2 \alpha_2 - 1} \\ &= \frac{3 \frac{m_1^2}{I(I+1)} - 1}{3 \frac{m_2^2}{I(I+1)} - 1} = \frac{3m_1^2 - I(I+1)}{3m_2^2 - I(I+1)} \end{aligned}$$

El correspondiente cuántico al valor clásico Q_0 es cuando

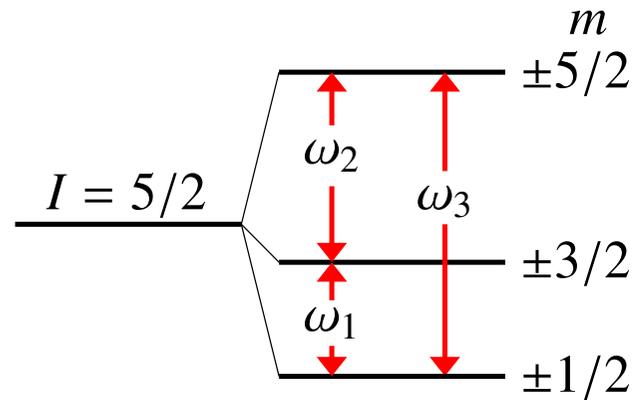
máxima alineación: $m = I$; $Q \rightarrow Q(|I m_2 = I\rangle)$

$$Q(m) = \frac{3m^2 - I(I+1)}{3I^2 - I(I+1)} Q(m = I)$$

$Q = Q(m = I) =$ "cuadrupolo del núcleo"

$$Q(m) = \frac{3m^2 - I(I+1)}{I(2I-1)} Q$$

Interacción hiperfina eléctrica. E con simetría axial



$$V_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\widehat{Q}_{20} = r^2 \mathcal{Y}_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle II | \widehat{Q}_{20} | II \rangle$$

$$U(I, m) = \frac{1}{4} V_{zz} \langle Im | e \widehat{Q}_{20} | Im \rangle$$

$$U(I, m) = \frac{3m^2 - I(I + 1)}{4I(2I - 1)} V_{zz} eQ$$

$$\Delta U = U(m) - U(m') = 3|m^2 - m'^2| \hbar \omega_Q$$

$$\hbar \omega_Q = \frac{eQ V_{zz}}{4I(2I - 1)}$$

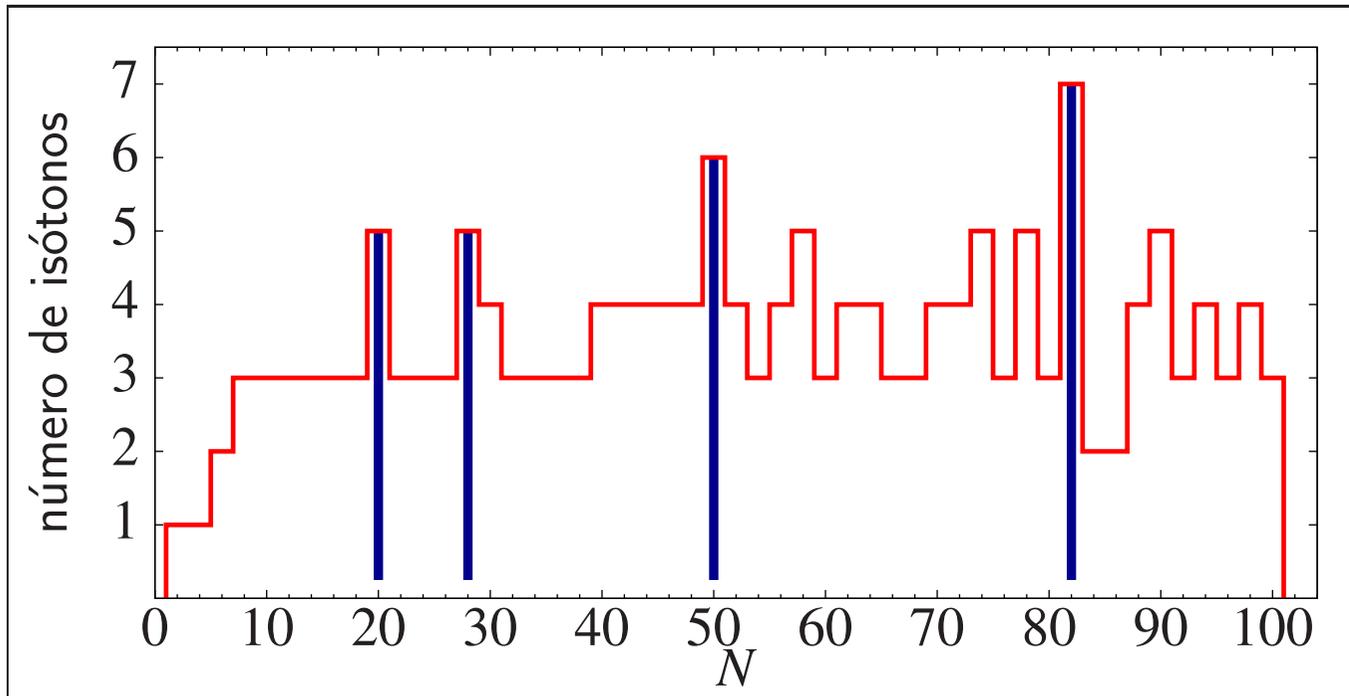
V_{zz} : muchos cristales los producen y se conocen

$\hbar \omega_Q$: producibles con laser

Nombre de la técnica: **espectroscopía laser de alta resolución**. Con esta técnica fueron medidos los datos de la figura $Q/(Z\bar{R}^2)$ vs (N, Z) en la página 58.

4. **El modelo de capas**

4.1. Más sobre números mágicos



- Número de núclidos (isótonos) estables como función del número de neutrones. Observe los máximos locales en $N = 20, 28, 50, 82$.

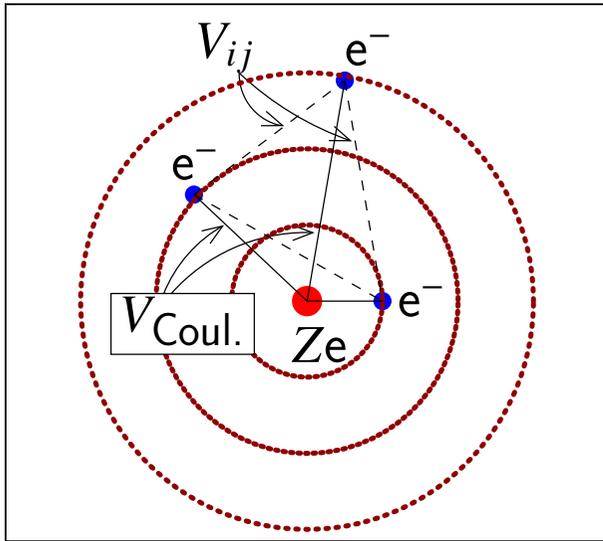
$2.61 \ 3^-$

$Z = 82$

	$0.96 \ 2^+$	$0.90 \ 2^+$	$0.80 \ 2^+$		$0.80 \ 2^+$	$0.81 \ 2^+$
	$\frac{0^+}{120}$	$\frac{0^+}{122}$	$\frac{0^+}{124}$	$\frac{0^+}{126}$	$\frac{0^+}{128}$	$\frac{0^+}{130}$
$N =$	120	122	124	126	128	130
$A =$	202	204	206	208	210	212

- Energía (en MeV) y espín del primer estado excitado en núcleos par-par de plomo ($_{82}\text{Pb}$). ¿Qué sucede en $N = 126$?

4.2. Campo medio en el modelo atómico de capas



$$H\Psi = E\Psi$$

$$H = \sum_{i=1}^Z T_i + \sum_{i=1}^Z V_{\text{Coulomb}}(r_i) + \sum_{i=1}^Z \sum_{j=i+1}^Z V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

$$V_{\text{Coulomb}}(r_i) = -\frac{Ze^2}{r_i}; \quad V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

La

Para poderlo resolver: **Teoría del Campo Medio**

$$V(r_i) \approx \sum_{j \neq i}^Z V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

sumatoria $\sum_j V_{ij}$ es igual al efecto de un potencial único **central** actuando sobre el electrón i , $V(r_i)$. El Hamiltoniano total es la suma de los Hamiltonianos de partículas individuales...

$$H = \sum_i^Z [T_i + V_{\text{Coulomb}}(r_i) + V(r_i)]$$

La ecuación para la función de **una** partícula:

$$[T_i + V_{\text{Coulomb}}(r_i) + V(r_i)] \psi_i(\mathbf{r}_i) = \epsilon_i \psi_i(\mathbf{r}_i)$$

La energía total:

$$E = \sum_i^Z \epsilon_i$$

La función de onda total -sin antisimetrizar-:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z) = \psi_1(\mathbf{r}_1) \cdot \psi_1(\mathbf{r}_2) \cdots \psi_1(\mathbf{r}_Z)$$

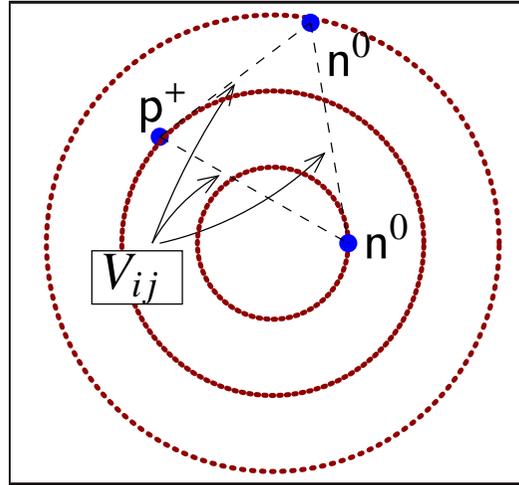
La función de onda total antisimetrizada (fermiones!)...

$$\Psi(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_Z) = \frac{1}{Z!} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{r}_1) & \psi_1(\mathbf{r}_2) & \cdots & \psi_1(\mathbf{r}_Z) \\ \psi_2(\mathbf{r}_1) & \psi_2(\mathbf{r}_2) & \cdots & \psi_2(\mathbf{r}_Z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_Z(\mathbf{r}_1) & \psi_Z(\mathbf{r}_2) & \cdots & \psi_Z(\mathbf{r}_Z) \end{vmatrix}$$

4.2.1. Solución completa: Hartree-Fock (autoconsistencia)

1. Proponga $V(r) = V^{(0)}(r)$.
2. Resuelva la ecuación de Schrödinger, obtenga ψ_i .
3. Calcule la distribución de carga $e|\psi_i|^2$.
4. Calcule el potencial producido por esta distribución de carga $\longrightarrow V^{(1)}(r)$.
5. Compare el potencial obtenido con el inicial: $V^{(0)}(r) \leftrightarrow V^{(1)}(r)$.
6. Si $V^{(0)}(r) = V^{(1)}(r)$ (según algún criterio previamente definido), las funciones ψ_i son las correctas. Fin.
7. Si no, obtenga un nuevo potencial siguiendo algún criterio de “mejora”, hasta obtener la igualdad.

4.3. El modelo de capas nuclear



$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A \sum_{j=i+1}^A V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

$V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ = potencial nuclear: p – p, p – n, n – n

Para poder obtener soluciones: **Teoría del Campo Medio**

$$V(r_i) \approx \sum_{j=i+1}^A V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

$$H = \sum_{i=1}^A [T_i + V(r_i)] = \sum_{i=1}^A h(r_i)$$

4.4. Interacciones residuales

Para distinguir entre la aproximación y el problema completo:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^A V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \\ &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A V(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^A V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - \sum_{i=1}^A V(r_i) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^A [T_i + V(r_i)]}_{H_{\text{campo medio}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^A \sum_{j=i+1}^A [V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - V(r_i)]}_{V_R} \end{aligned}$$

$$H = H_{\text{campo medio}} + V_R$$

$V_R \equiv$ interacción residuales = el “residuo” de la interacción completa

Base teórica del modelo de capas: Respecto a la energía:

$$H_{\text{campo medio}} = \sum_i^A h(\mathbf{r}_i)$$

$$h(\mathbf{r}_i)\psi_i = \epsilon_i\psi_i$$

$$E = \sum_i^A \epsilon_i$$

$$|\langle H_{\text{campo medio}} \rangle| = E \gg |\langle V_R \rangle|$$

- El proceso de autoconsistencia es justificado si los resultados concuerdan con los experimentales.
- $V(r_i)$ es el potencial que cada nucleón siente como causado por los demás. Es el potencial que define al núcleo: Teoría del campo medio.

4.5. La forma del potencial medio

Qué sabemos de $V(r_i)$? ¿Cómo debería ser?

1. Cerca del centro el potencial es simétrico:

$$dV/dr|_{r=0} = 0 : \text{Potencial "plano"}$$

2. Borde del núcleo "definido": $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow R_0} 0$.

1. Cajón de potencial

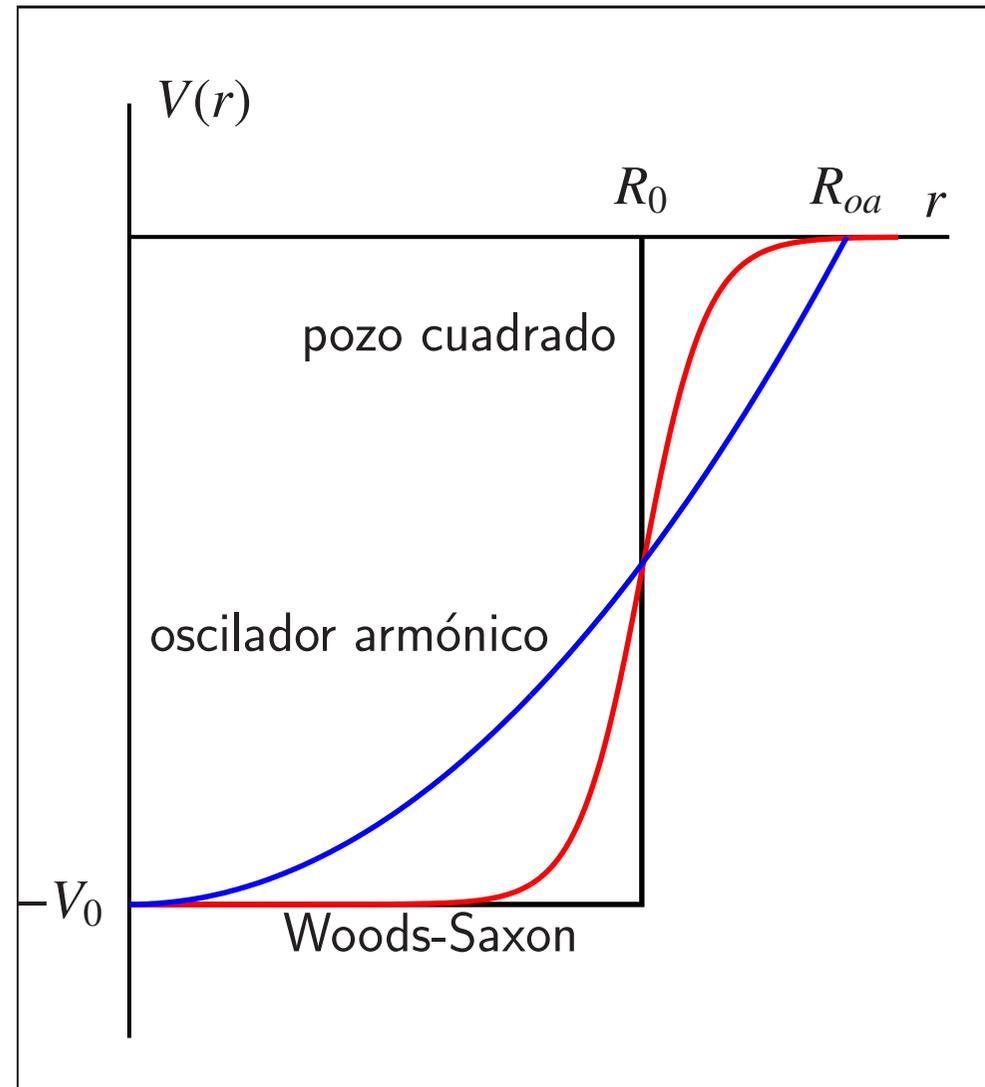
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & R \leq R_0 \\ 0 & R > R_0 \end{cases}$$

2. Oscilador armónico

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \left[1 - (r/R_{oa})^2 \right] & R \leq R_{oa} \\ 0 & R > R_{oa} \end{cases}$$

3. **Woods-Saxon** R. D. Woods and D. S. Saxon, *Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering*, Physical Review, **95**, 577 (1954)

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$



4.6. Números cuánticos en el oscilador armónico y en el potencial de Coulomb

El oscilador armónico (núcleo)

$$V_{oa}(r) = \frac{m_N}{2} \omega_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{m_N}{2} \omega_0^2 r^2$$

La energía en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \hbar\omega_0 \left(n_x + 1/2 + n_y + 1/2 + n_z + 1/2 \right) \\ &= \hbar\omega_0 \left(n_x + n_y + n_z + 3/2 \right) = \hbar\omega_0 \left(N + 3/2 \right) \end{aligned}$$

En coordenadas esféricas...

$$\left\{ \frac{d^2}{dr_i^2} + \frac{2m_N}{\hbar^2} [\epsilon_{nl} + V(r)] + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right\} u_i(r_i) = 0$$

$$\epsilon_{nl} = \hbar\omega_0 \left[2(n - 1) + \ell + \frac{3}{2} \right] = \hbar\omega_0 \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

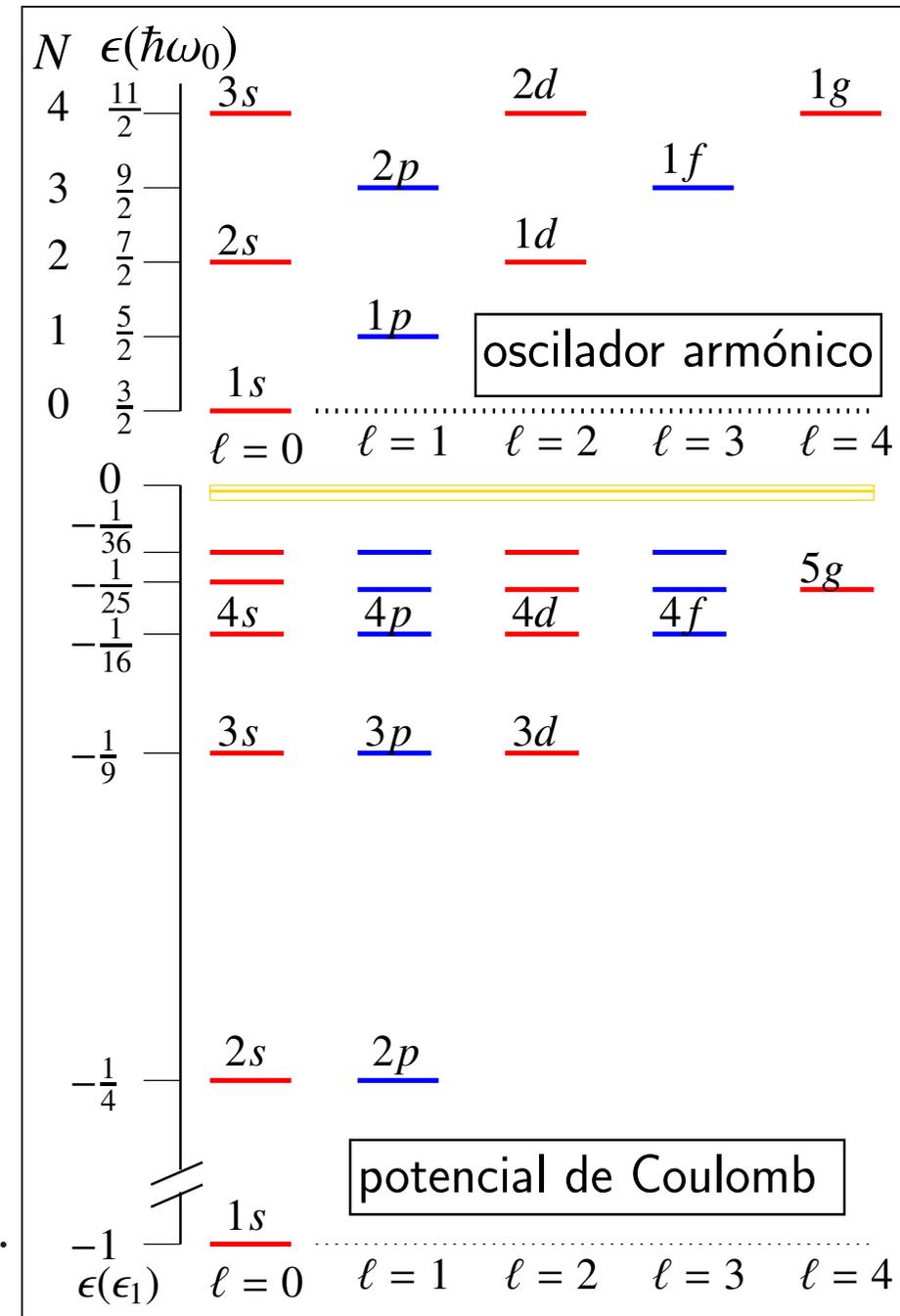
n = número de nodos de la función radial = 1, 2, ...

El pozo Coulombiano (átomo)

$$\epsilon_n = - \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{\mu c^2}{2n^2}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}$$

$n \equiv n_r + \ell + 1$ = número cuántico principal = 1, 2, ...

$n_r = 0, 1, 2, \dots$ $\ell = 0, 1, 2, \dots$



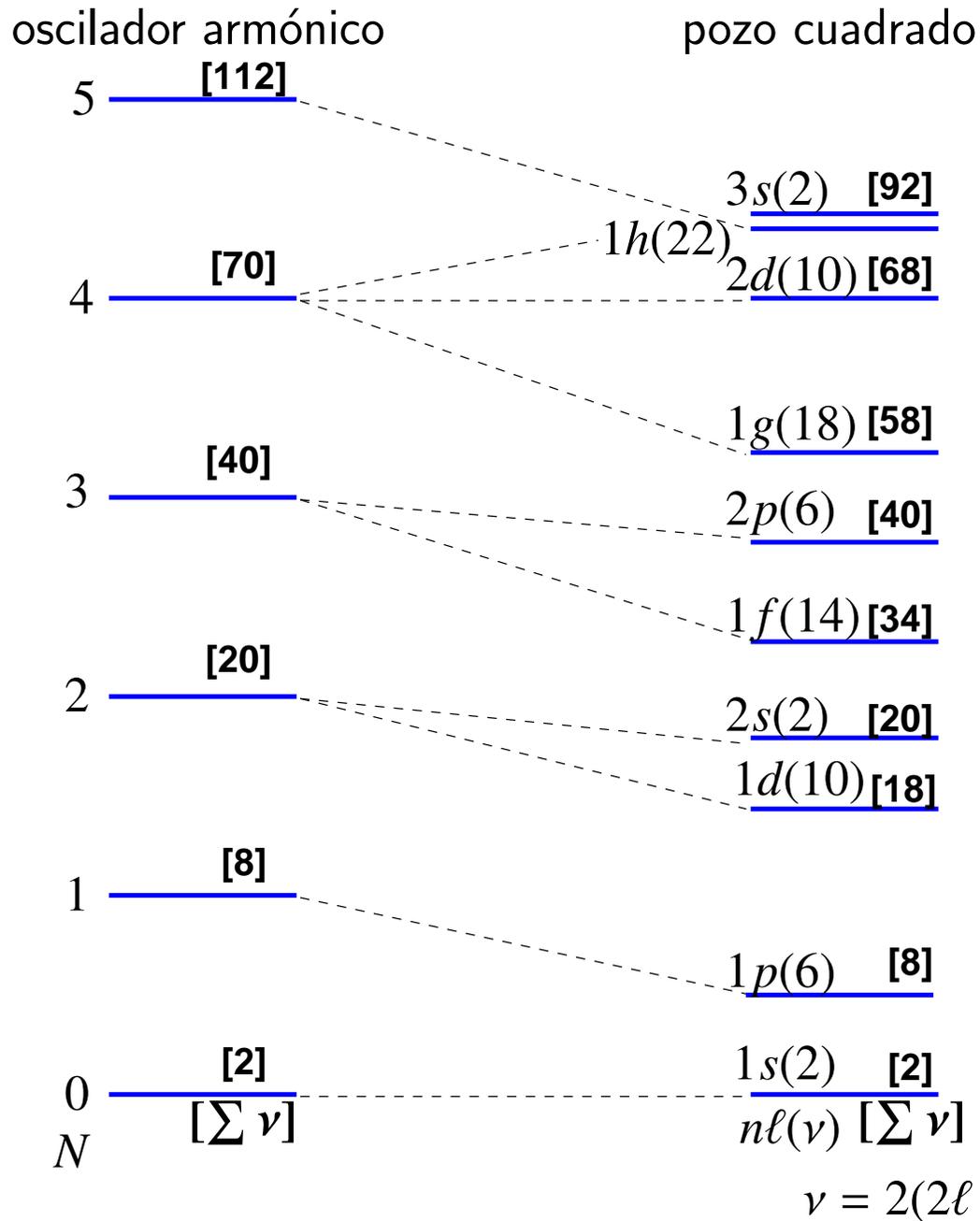
4.7. N , ℓ , π en el oscilador armónico

$$N = 2(n - 1) + \ell$$

$$\pi = (-1)^\ell$$

N	0	1	2		3		4			5		
n	1	1	2	1	2	1	3	2	1	3	2	1
ℓ	0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	3	5
nS	1s	1p	2s	1d	2p	1f	3s	2d	1g	3p	2f	1h
π	+	-	+		-		+			-		

4.8. El lío con los números mágicos



El lío es que no todos los números mágicos predichos se corresponden con los experimentales. Solamente los más bajos: 2, 8, 20.

Un intento de ponerlos en correspondencia:

o. a.	2	8	20	40	70	112			
p. c.	2	8	18	20	34	40	58	68	92
exp.	2	8	20	28	50	82	126		

4.9. Acople espín-órbita

- Maria Goeppert Mayer, *On closed shells in nuclei. II*. Physical Review **75**, 1969 (1949).
- Otto Haxel and J. Hans D. Jensen and Hans E. Suess, *On the “magic numbers” in nuclear structure*, Physical Review **75**, 1766 (1949).

El texto a continuación está basado en: Maria Goeppert Mayer, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, John Wiley (1955), p. 55.

$$\begin{aligned} {}^5_3\text{Li} &= \alpha + p \\ {}^5_2\text{He} &= \alpha + n \end{aligned}$$

- Según el esquema de la p. 76, para el estado base de $|\alpha + N\rangle$: $\ell_p = \ell_n = 1$
- ${}^5_3\text{Li}$ y ${}^5_2\text{He}$ son inestables = los estados $|A = 5, \ell = 1\rangle$ no son ligados.
- Los dos estados (los de más baja energía)

$$|\ell = 1, j = l + 1/2\rangle,$$

$$|\ell = 1, j = l - 1/2\rangle,$$

son no ligados = corresponden a estados de dispersión (= estados del continuo, $E > 0$) de ${}^4\text{He} + n$ y ${}^4\text{He} + p$

- ¿Cómo obtener información sobre estos estados? R: colisiones no elásticas = reacciones.

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \right|_{\theta \text{ fijo}} \quad \text{máxima a } E_r = \left\{ \begin{array}{l} 1.25 \text{ MeV: n} \\ 2.4 \text{ MeV: p} \end{array} \right\} \quad \leftarrow \text{ resonancia}$$

Los números cuánticos de la resonancia según el modelo de capas:

$$|A = 5 \text{ resonancia}\rangle = |E_r, \ell = 1, j = \ell + 1/2\rangle$$

Conclusión: existe un nivel $|p3/2\rangle$ no ligado en ${}^5_3\text{Li}$ y ${}^5_2\text{He}$.

- Más datos experimentales: existe otra resonancia con $|j = 1/2\rangle$ a más alta energía (varios MeVs)

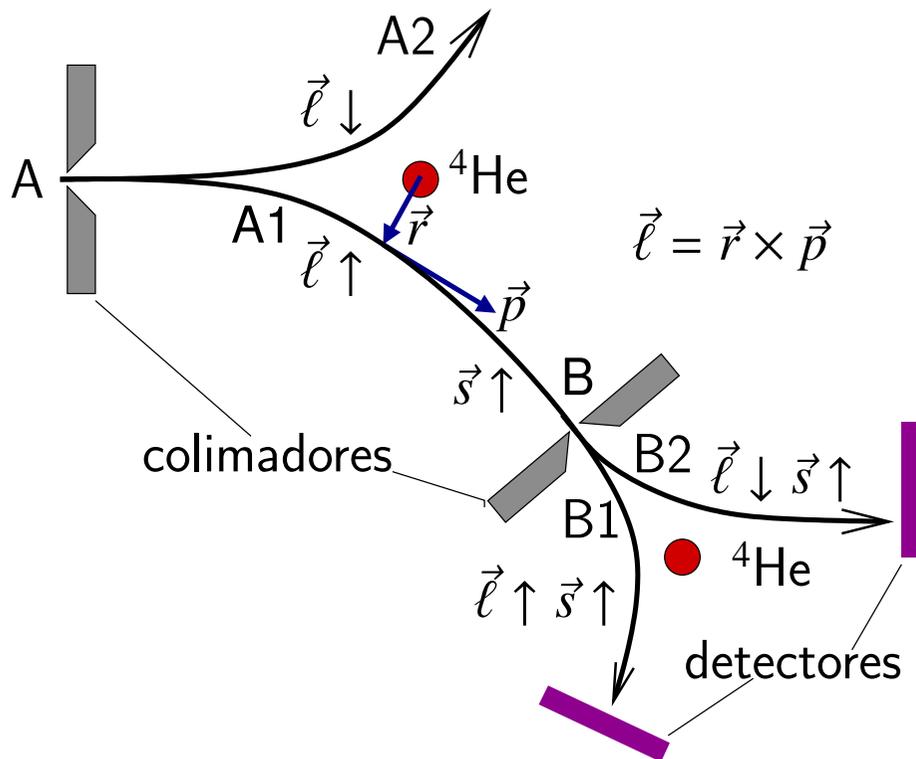
Puede ser

$$j = \frac{1}{2} = \ell - s = 1 - \frac{1}{2}$$

Polarización de protones por colisión

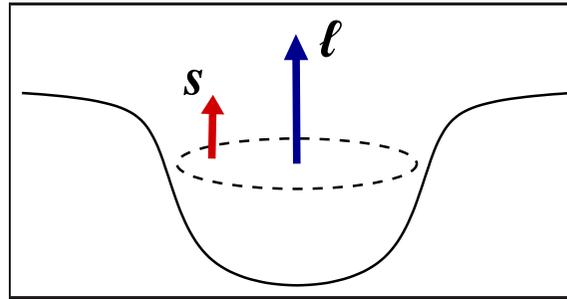
M. Heusinkveld and G. Freier, *The production of polarized protons and the inversion of energy levels of the $P_{1/2} - P_{3/2}$ doublet in ${}^5\text{Li}$* . Physical Review **85**, 80 (1952).

- En A: protones no polarizados en forma alguna.
- trayectorias A1: $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{\ell} \uparrow$ (saliendo del plano). A2: $\vec{\ell} \downarrow$.
- A1 contiene $\vec{s} \uparrow$ y $\vec{s} \downarrow$. ¿En la misma proporción? Seguramente no si la dispersión es preferencial para $\vec{\ell} \parallel \vec{s}$.
- Una vez más: dispersión preferencial para protones con $\vec{\ell} \parallel \vec{s} \rightarrow$ hay más de estos estados en B1.
- en B2: $\vec{\ell} \downarrow \vec{s} \uparrow$: antiparalelos.
- resultado experimental: $\sigma(B1) \approx 2\sigma(B2)$.
- **Conclusión:** existe una fuerza entre el protón y el núcleo que depende fuertemente de la orientación mutua de $\vec{\ell}$ y \vec{s} .



El resumen teórico

$$V(r) \leftarrow V(r) + V_{\ell s} \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s}$$



$$\langle \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \boldsymbol{j}^2 \rangle - \langle \boldsymbol{\ell}^2 \rangle - \langle \boldsymbol{s}^2 \rangle) = \frac{1}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1))$$

$$\langle \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}\ell & j = \ell + 1/2 \\ -\frac{1}{2}(\ell + 1) & j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

$$V(r) \leftarrow \begin{cases} V(r) + \frac{1}{2}V_{\ell s}\ell & j = \ell + 1/2 \\ V(r) - \frac{1}{2}V_{\ell s}(\ell + 1) & j = \ell - 1/2 \end{cases} \quad \Delta\epsilon_{\ell s} = \frac{1}{2}V_{\ell s}(2\ell + 1)$$

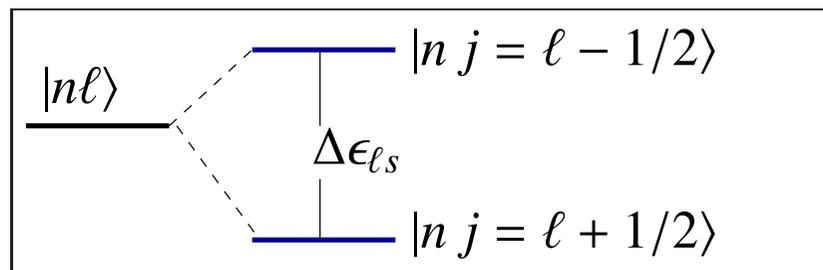
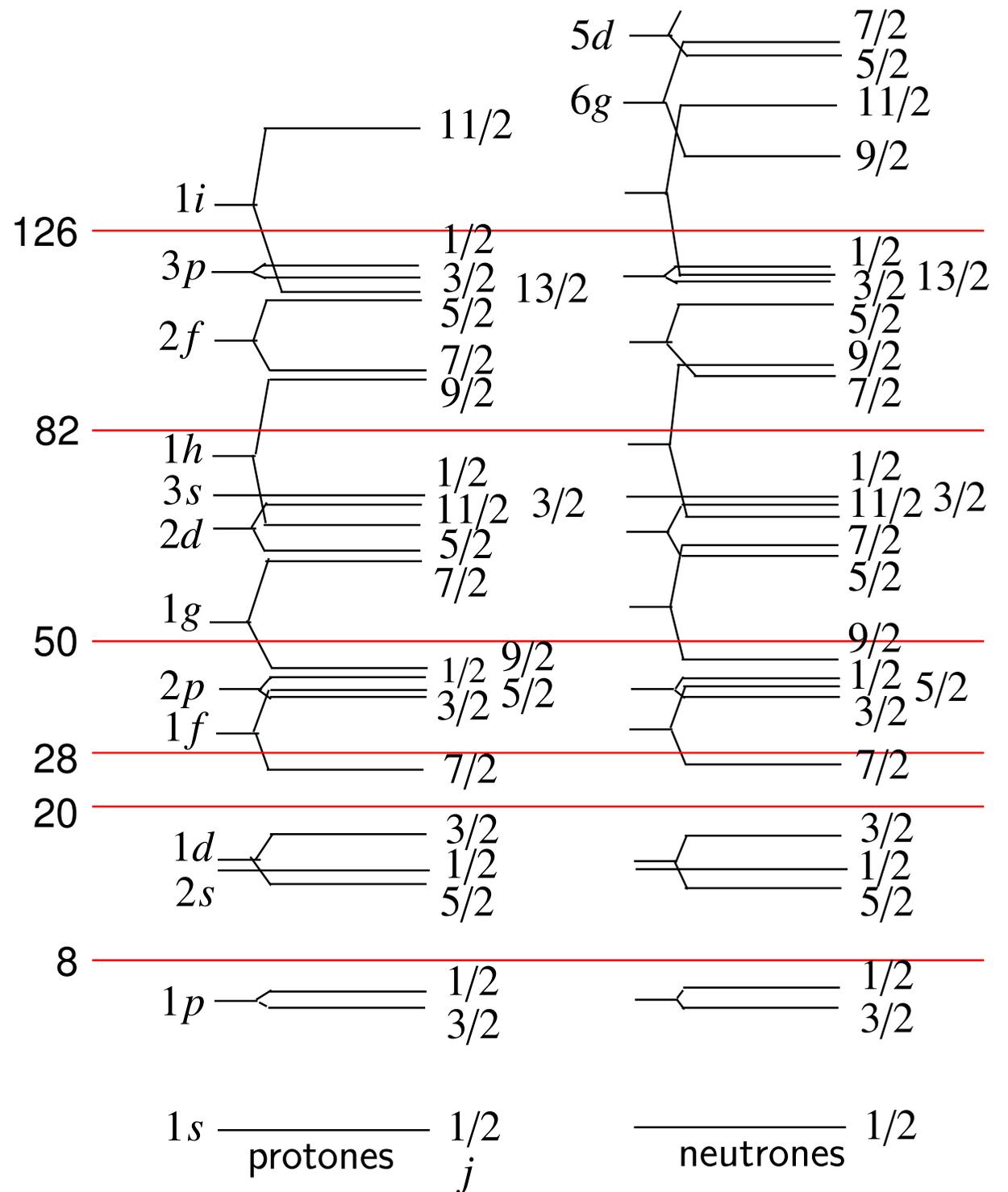


Figura tomada de: P. F. A. Klinkenberg, *Tables of nuclear shell structure*, Review of Modern Physics, **24** 63 (1952).

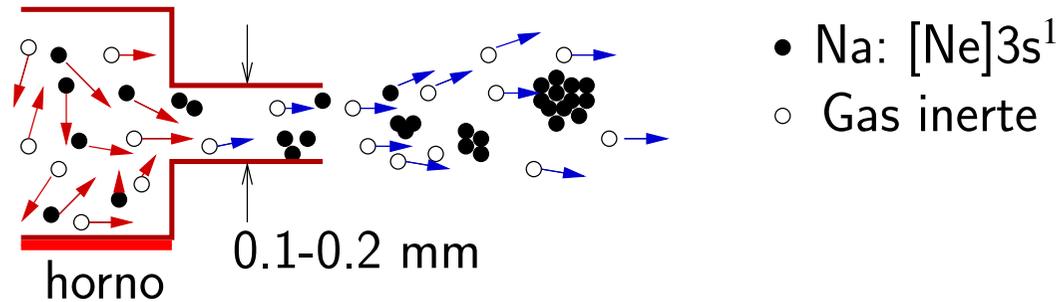


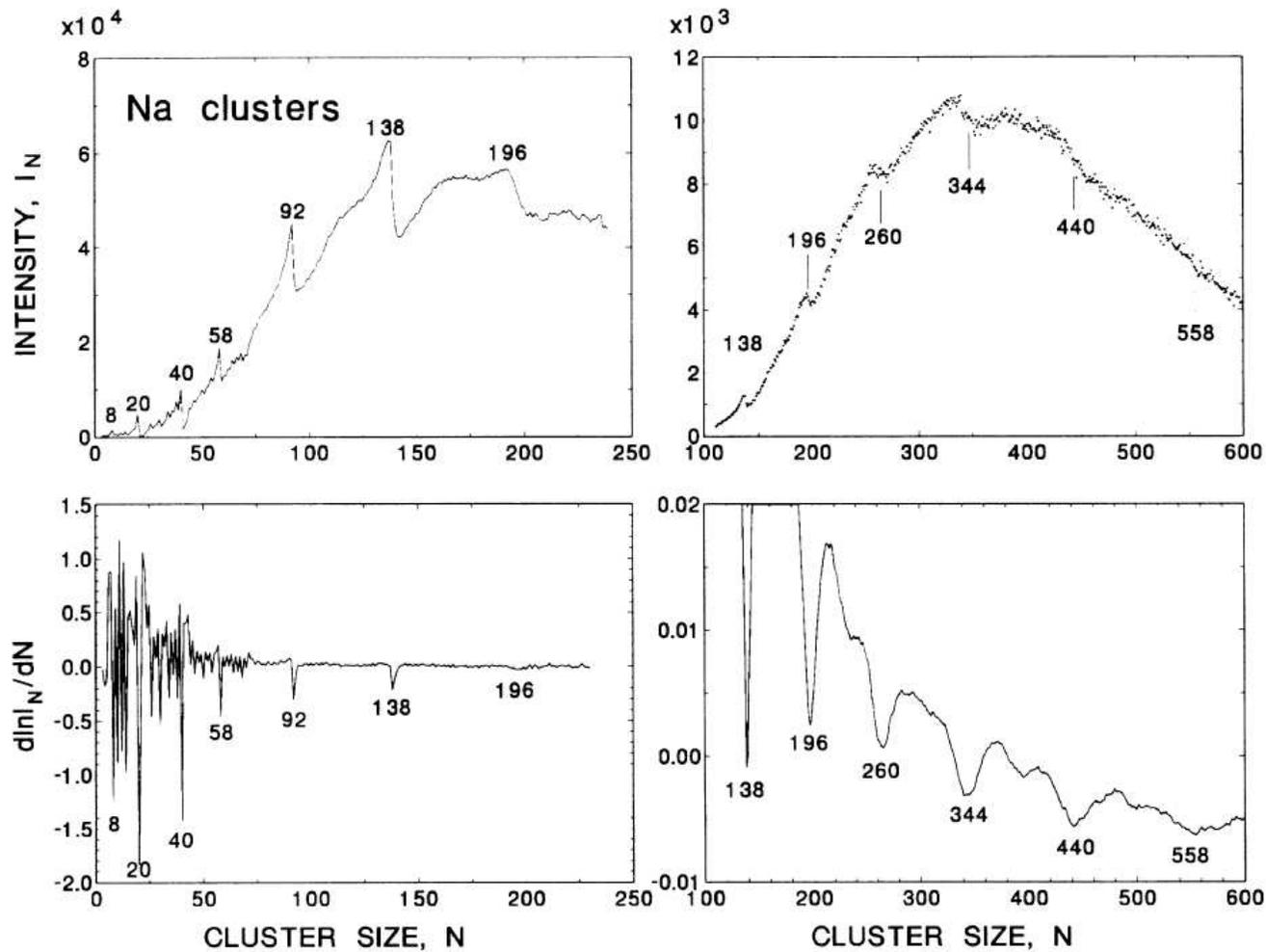
4.10. Estructura de Capas en Sistemas Mesoscópicos

Kris L. G. Heyde, *The Nuclear Shell Model*, Springer Verlag (1994).

Experimento: expansión de un gas a través de un capilar (válvula).

S. Bjørnholm et al., **Mean-field** *quantization of several hundred electrons in sodium metal clusters*, *Physical Review Letters*, **65**, 1627 (1990).





N = Número de átomos en el cúmulo

I_N = Número de cúmulos con N átomos

Observaciones experimentales: Abundancias especialmente altas (máximos locales) en

$$N = 8, 20, 40, 58, 92, 138, 196, \dots$$

¿Qué dice la teoría?

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp((r - r_0)/a)}$$

$$V_0 = -6.0 \text{ eV}, r_0 = R_0 N^{1/3}, R_0 = 2.25 \text{ \AA}, a = 0.74 \text{ \AA}$$

Números mágicos en capas esféricas de cúmulos metálicos.

WS: Woods-Saxon

LDA: Local Density Approximation

capa	exper. [Na]	WS	LDA
0	2	2	2
1	8	8	8
2	20	20	18/20
3	40	40	34/40
4	58	58	58
5	92	92	92
6	138	138	138
7	196	198	186/196
8	260±4	254/268	254
9	344±4	338	338
10	440±2	440	440

4.11. Consecuencias: predicciones para el estado base

- Para núcleos con capas cerradas (o completas)

- Cada m_j está ocupado, la componente 'z' de \mathbf{j} se anula por parejas:

$$m_1 + m_2 = m_j - m_j \rightarrow I = 0$$

- Forma geométrica promedia: esférica:

$$Q \approx 0.$$

- Núcleos con solamente **un nucleón adicional** a capa llena:

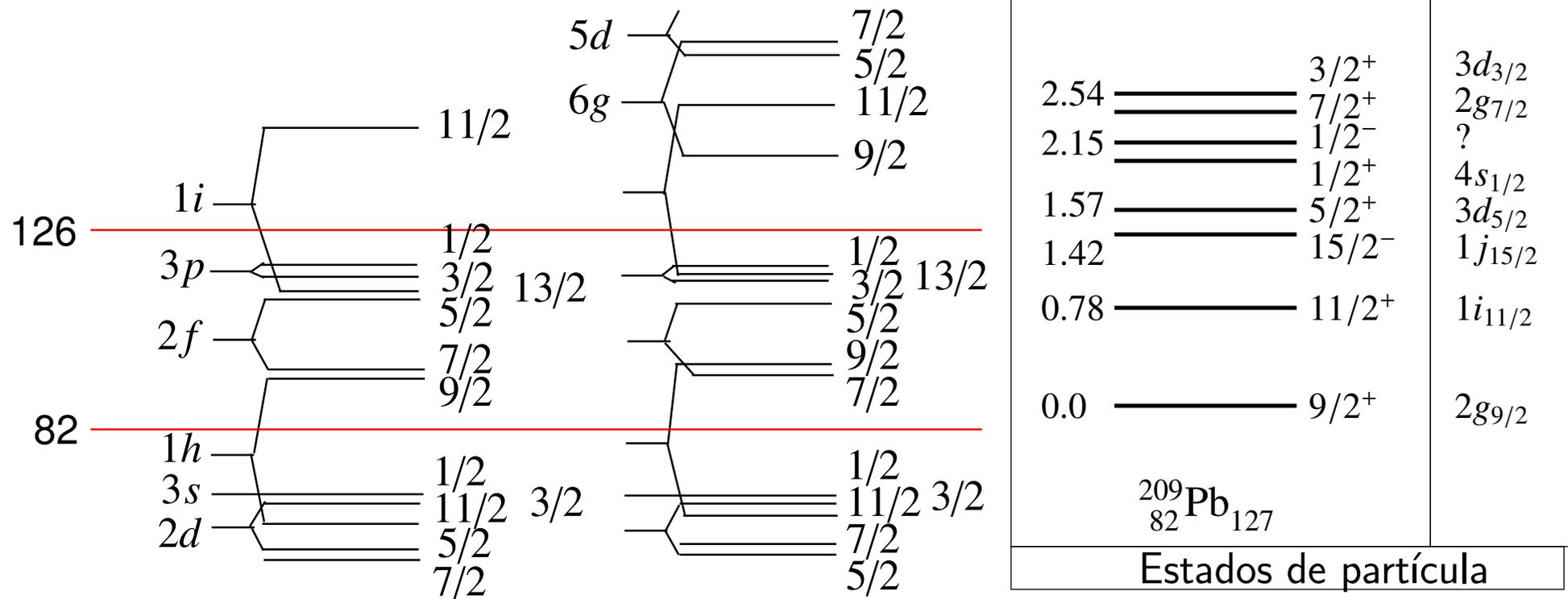
$$|n \ell j\rangle \rightarrow I = j, \pi = (-1)^\ell$$

- Núcleos con solamente **un nucleón menos** que capa llena = **un hueco**: el hueco ocupará un estado

$$|n \ell j\rangle \rightarrow I = j, \pi = (-1)^\ell$$

4.12. Predicciones para estados excitados

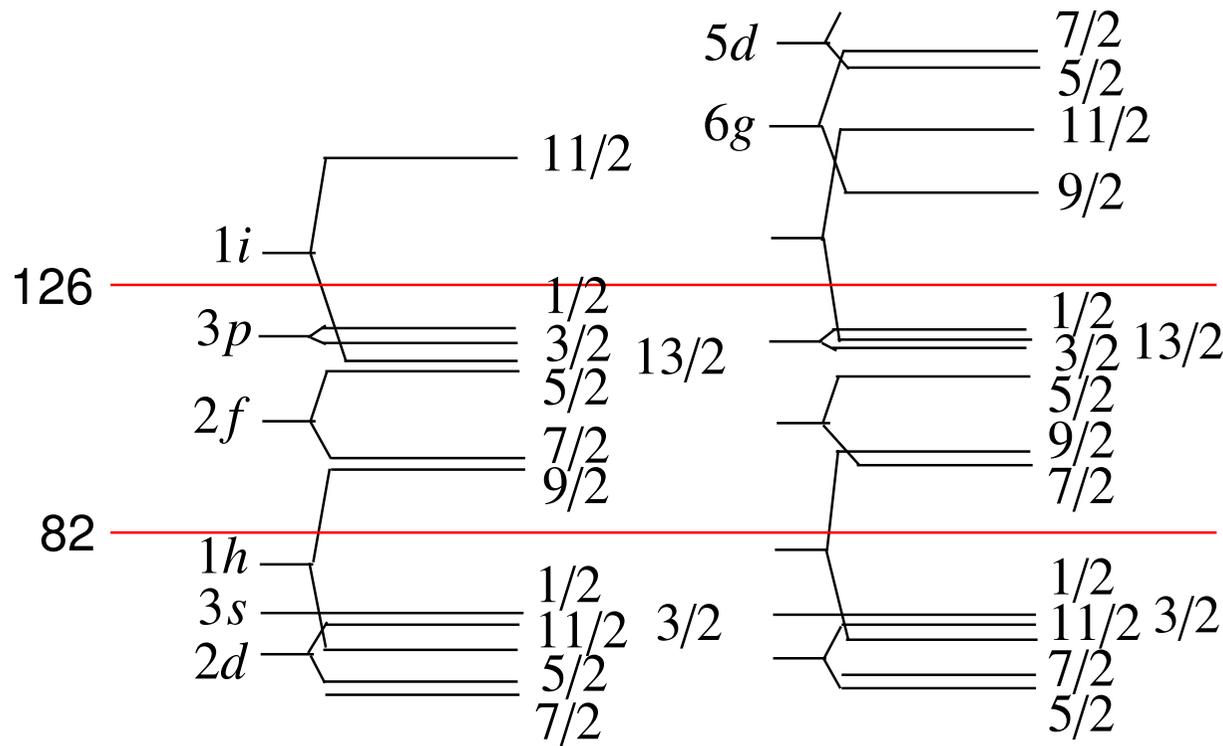
Caso de estudio 1: el estado excitado se puede interpretar como formado por un nucleón impar por fuera de una capa completa ó casi completamente llena \equiv excitaciones de partícula aislada.



Solamente tenemos en cuenta las posibilidades del sistema impar, en este caso los neutrones.

¿Por qué? Porque para llevar nucleones del sistema par a niveles más altos, primero se necesita energía para desacoplar los nucleones emparejados.

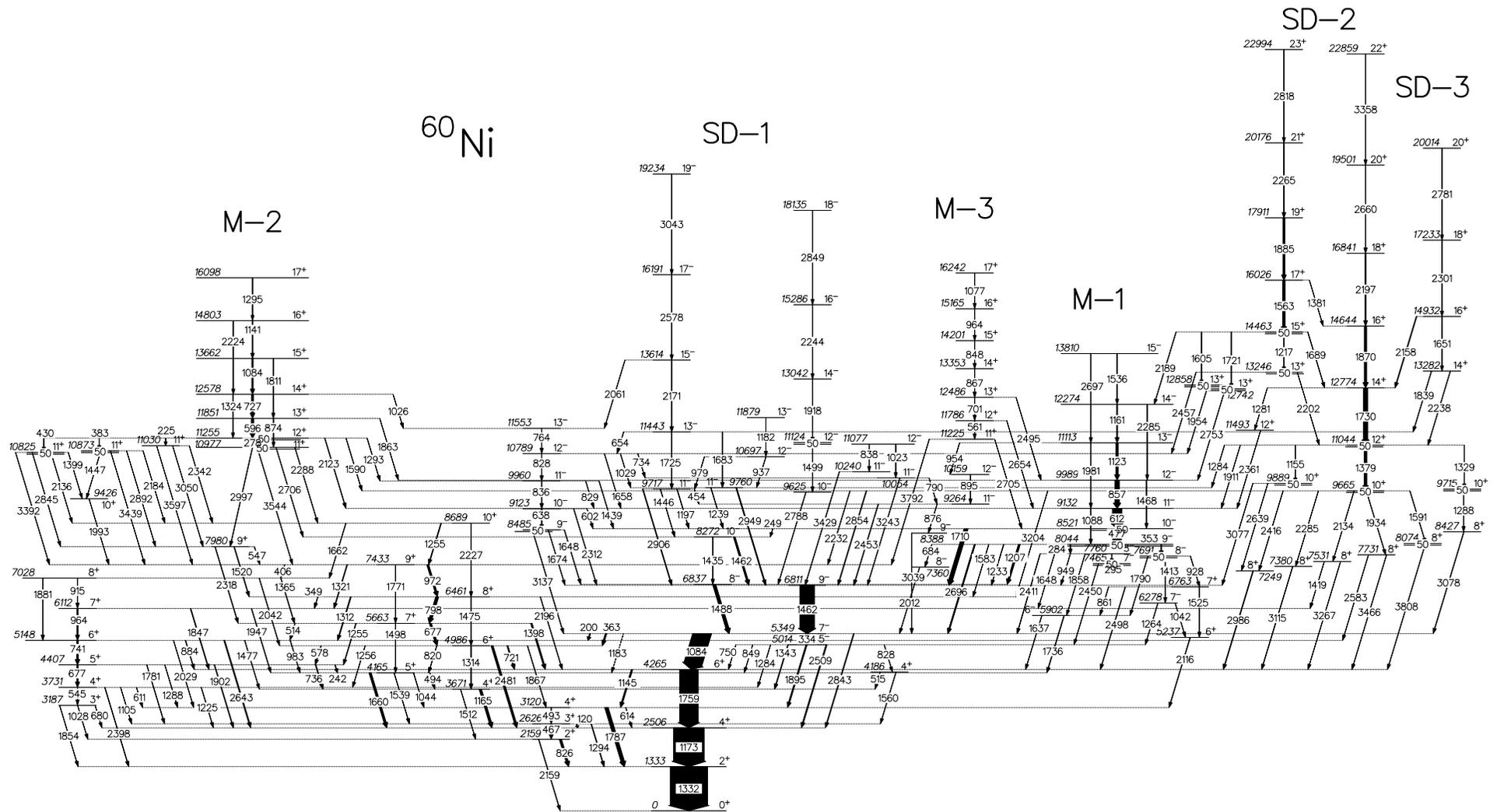
Caso de estudio 2: el estado excitado se puede interpretar como formado por un **hueco**

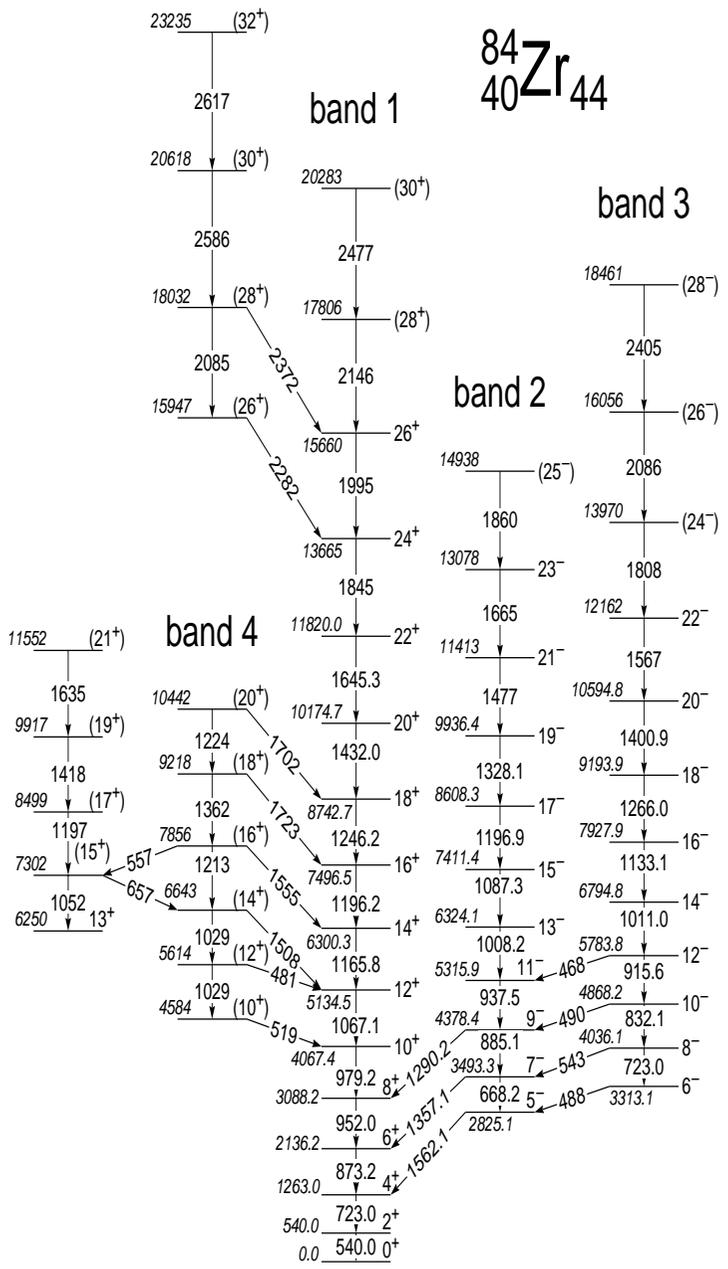


Experimental		Secuencia Modelo de Capas
2.71	9/2 ⁺	
2.34	7/2 ⁻	$2f_{7/2}^{-1}$
1.63	13/2 ⁻	$1i_{13/2}^{-1}$
0.89	3/2 ⁻	$3p_{3/2}^{-1}$
0.57	5/2 ⁻	$2f_{5/2}^{-1}$
0.0	1/2 ⁻	$3p_{1/2}^{-1}$
$E(\text{MeV})$	I^π	
$^{207}_{82}\text{Pb}_{125}$		
Estados de hueco		

La investigación experimental actual del modelo de capas: un ejemplo

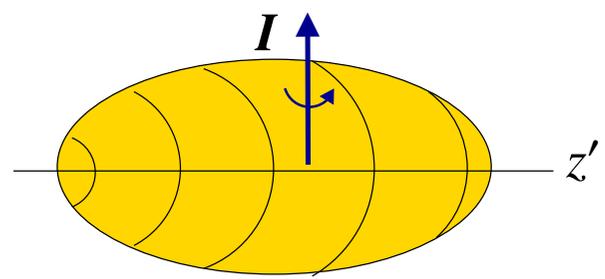
Ejemplo: Physical Review C **78**, 054318 (2008). Diego Torres, Tesis de Doctorado UN (2007)





R. Cardona et al., Physical Review C **68**, 024303 (2003).

El rotor perfecto

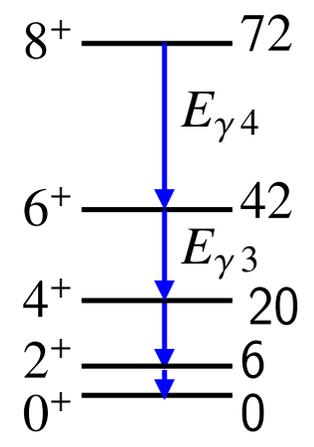


$$H_{\text{rotor}} = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

I = momento angular colectivo

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} I(I + 1)$$

$$E(I) - E(I - 2) = E_{\gamma} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} (4I - 2)$$



4.13. El modelo de capas deformado

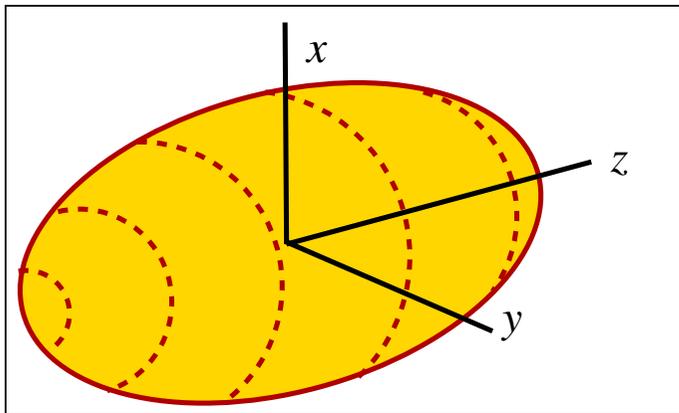
Nilsson ya había observado que la misma secuencia de niveles de energía producida por Woods-Saxon se logra con un oscilador armónico **modificado**:

S. G. Nilsson, **Binding states of individual nucleons in strongly deformed nuclei**, Danske Matematisk-Fysiske Meddelelser, **29**, no. 16, 14 (1955).

$$H_{\text{esf}} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + \frac{1}{2}M\omega_0^2 r^2 - C\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s} - D\ell^2$$

– $D\ell^2$: “aplana” el potencial total en radios grandes (ℓ 's grandes)

Esta ecuación es soluble analíticamente!



Para considerar los núcleos deformados: deformar el potencial.

$$V_{\text{esf}} = \frac{M}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$V_{\text{def}} = \frac{M}{2} \left[\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right]$$

$$H_{\text{def}} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\text{def}} - C\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{s} - D\ell^2$$

Los “detalles técnicos”:

La **anisotropía** del potencial se corresponde con la diferencia entre las frecuencias de oscilación ω_{\perp} y ω_z .

ε = elongación

$$\omega_z = \omega_o(\varepsilon)[1 - (2/3)\varepsilon]$$

$$\omega_{\perp} = \omega_o(\varepsilon)[1 + (1/3)\varepsilon]$$

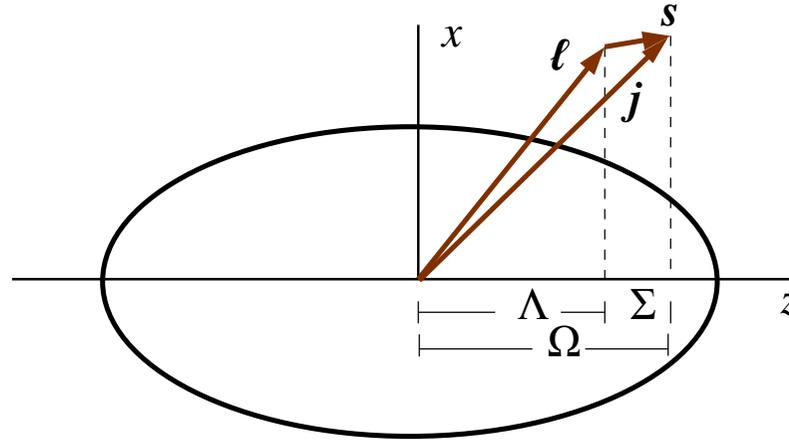
$\omega_0(\varepsilon)$ **es escogida** tal que el volumen nuclear permanece fijo.

(Recordar: $\hbar\omega_0 \approx 41 \cdot A^{-1/3}$ MeV)

$$\varepsilon = \frac{\omega_{\perp} - \omega_z}{\omega_0} \begin{cases} \varepsilon > 0 \rightarrow \text{forma prolata} \\ \varepsilon < 0 \rightarrow \text{forma oblata} \end{cases}$$

4.14. Deformaciones pequeñas

Números cuánticos de momento angular de partícula aislada en el caso deformado



Reescribamos la dependencia espacial del potencial del oscilador armónico deformado:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{M} V_{\text{def}} &= \left[\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right] \\
 &= \omega_0(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon \right) (x^2 + y^2) + \omega_0(\varepsilon) \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon \right) z^2 \\
 &= \omega_0^2 \left[(x^2 + y^2 + z^2) + \varepsilon \frac{2}{3} (x^2 + y^2 - 2z^2) + \varepsilon^2 \frac{1}{3} \left((x^2 + y^2) + \frac{4}{3} z^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

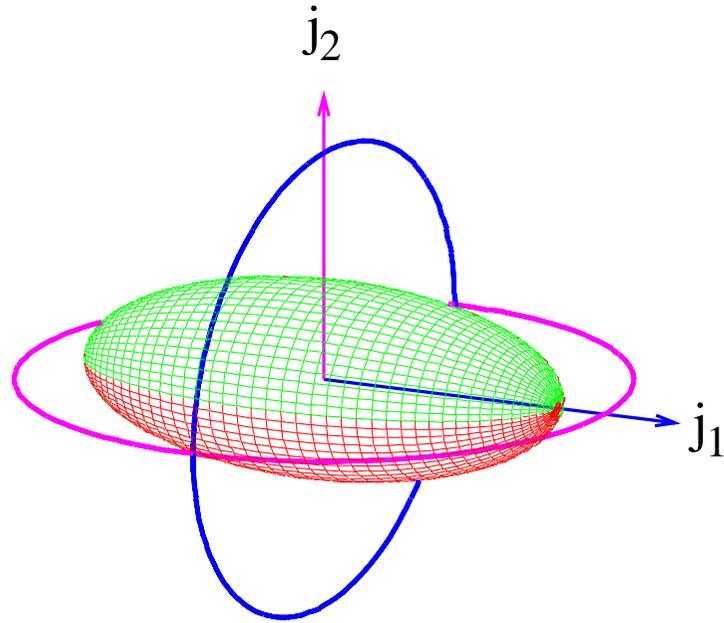
Entonces

$$\boxed{H_{\text{def}} = H_{\text{esf}} + \varepsilon h' + O(\varepsilon^2) + \dots}$$

$$\varepsilon h' = \varepsilon \frac{M}{2} \omega_0^2 \frac{2}{3} (x^2 + y^2 - 2z^2) = -\frac{M}{2} \omega_0^2 \frac{4}{3} \varepsilon r^2 P_2(\cos \theta)$$

Un punto de vista no matemático

R. F. Casten, *Nuclear structure from a simple perspective*. Oxford (2000).



Dos nucleones en órbitas alrededor de un núcleo deformado.

1. La interacción nuclear es atractiva.
2. La norma de los dos momentos angulares es igual:

$$j_1 = j_2$$

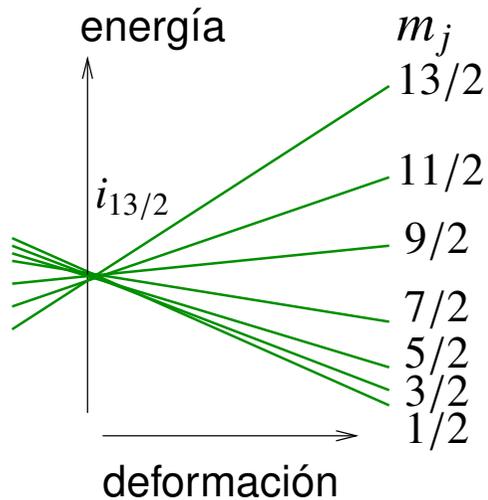
3. La órbita 1 es “polar”, la órbita 2 es “ecuatorial”:

$$\Omega_1 = j_1$$

$$\Omega_2 = 0$$

¿Cuál de las dos órbitas tiene energía más baja, es decir, está más ligada?

Desdoblamiento de la capa $i_{13/2}$ por efecto de la deformación... $(2j + 1)/2 = 7$ componentes. En cada nivel caben 2 partículas: $|\pm j\rangle$.



En el lenguaje de las funciones de onda del caso esférico

$$\Omega = m_j \leftarrow \text{Esférico: Energías independientes de } m_j$$

Sin entrar en el detalle de cómo calcular el elemento de matriz...

S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*, Cambridge University Press (1995). Prob. 8.1, p. 359.

... en la base de funciones “esféricas”:

$$\langle nlsj\Omega | \varepsilon h' | nlsj\Omega \rangle = \frac{1}{6} \varepsilon M \omega_0^2 \langle r^2 \rangle \frac{3\Omega^2 - j(j+1)}{j(j+1)}$$

En palabras: la energía de los estados varía

- linealmente con la deformación ε ;
- cuadráticamente con $m_j \equiv \Omega$.

Conclusión: la degeneración en m_j del caso esférico es rota en el caso deformado. La energía depende de la dirección del momento angular total \vec{j} .

Ojo: sobrevive una degeneración... $|+j\rangle$ y $|-j\rangle$ tienen la misma energía.

GRACIAS !!

Referencias

Richard B. Firestone and Virginia S. Shirley, editors. *Table of Isotopes*, volume I. John Wiley and Sons, Inc., 1996.

John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2nd. edition, 1975.

Edward M. Purcell. *Berkeley Physics Course. Electromagnetism*. Reverté, 1980.