****

Bound States in Hadronic Physics.

M. De Sanctis

Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Física,
Grupo de Campos y Partículas.

Andean School on Nuclear Physics
Bogotá, Universidad de Los Andes, 27 de Noviembre de 2012.

The author gratefully thanks the Vicerrectoría de Investigaciones of Universidad Nacional de Colombia for the financial support received through the research grant *Teoría de Campos Cuánticos aplicada a sistemas de la Física de Partículas, de la Física de la Materia Condensada y a la descripción de propiedades del grafeno"*.

****

Sistemas ligados asintóticamente libres

Galáxias y sistemas planetarios - Interacción gravitacional
Mecánica clásica + correcciones debidas a la Relatividad General

Para dos cuerpos, en el Centro de Masa:

$$H = \frac{p^2}{2m_r} - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

Con la *masa reducida*:

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Recordamos: $H =$ *Energía* - Constante *en* el movimiento

$$r = Gm_1m_2 \left[\frac{p^2}{2m_r} - H\right]^{-1}$$

$H > 0 \quad r \to \infty$ para $p \to \sqrt{2m_r H}$ *Sistema no ligado*

$H < 0 \quad r < Gm_1m_2[-H]^{-1}$ *Sistema ligado*

Mundo microscópico

Moléculas

Átomos, positronio - Interacción electromagnética

Mecánica cuántica n.r. + correcciones relativistas + radiativas (QED)

Primer término, en el Centro de Masa:

$$H = \frac{p^2}{2m_r} - \frac{e^2}{r}$$

Recordamos los números relevantes:

$$m_{e-}c^2 = m_{e+}c^2 = 0.511 MeV, \quad m_p c^2 = 938.3 MeV, \quad m_n c^2 = 939.6 MeV$$

$$\hbar c = 197.3 MeV \times fm, \qquad \alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137.06$$

Niveles de energía sistemas hidrogenóides - Ecuación de Schrödinger

$$E_n = -\frac{m_r e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{m_r c^2 \alpha^2}{2n^2}$$

Átomo de hidrógeno $E_1 = -13.6\ eV + ...\ (m_r \simeq m_{e-})$

Positronio (inestable) $E_1 = -6.8\ eV + ...\ (m_r = m_{e-}/2)$

E_n Energías negativas (m. c. *valores discretos*) -estados ligados

$E = |E|$ Energías positivas (m. c. *valores continuos*) -estados as. libres

Energía de reposo de un sistema = $Masa{\times}c^2$

(M. D. S. *Masa, def.: Masa en reposo*)

$$Mc^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + E$$

Para $E = E_n < 0 \quad Mc^2 < m_1c^2 + m_2c^2$

La masa del sistema ligado es *menor* de la masa de los constituyentes.
La energía de ligadura $E_l = E < 0$ podemos *definirla* como:

$$E_l = (M - m_1 - m_2)c^2 \ \ < 0$$

Generalizamos a muchos constituyentes

$$E_l = (M - \sum_i m_i)c^2 \ \ < 0$$

****

La relatividad *cambia el cero* de la energía.

Dos partículas con momentum nulo y a distancia r infinita,

- en mecánica clásica tienen $Energía = 0$

- en mecánica relativista tienen $Energía = m_1c^2 + m_2c^2$

Física de los Núcleos

Interacción nuclear fuerte (teoría fenomenológica)
Mecánica cuántica n.r. + efectos relativistas

Nucleones, piones .... (Partículas compuestas)

Unos *números*:
Energía de ligadura en los núcleos $E_l \simeq$ *unos* $MeV/$ nucleón
Por ejemplo, en el Deuterón (dos cuerpos):

$$E_l = -2.23\ MeV$$

$$|E_l|/(m_p c^2 + m_n c^2) = 2.23\ MeV/1878\ MeV\ \simeq 10^{-3}$$

*****

En cambio, recordamos que:
en el Átomo de Hidrógeno

$$|E_l|/(m_p c^2 + m_e c^2) = 13.6\ eV/938.8 MeV\ \simeq 10^{-8}$$

en el Positronio

$$|E_l|/(m_{e-} c^2 + m_{e+} c^2) = 6.8\ eV/1.22 MeV\ \simeq 10^{-5}$$

*****

En la física de los núcleos, $|E_l|$ es *tan grande* que la podemos determinar midiendo:
- M, la masa del núcleo, con un *espectrómetro de masa*
- y calculando la diferencia con la suma de las masas de los nucleones.
(imposible experimentalmente con los átomos)

Observaciones generales sobre los sistemas *asintóticamente libres*

---

* Éxito del marco teoríco:
* Si suministramos energía (p.e. por medio de una dispersión de otras partículas)...

- podemos *sacar* los constituyentes que van a los
- estados del continuo descritos también por la Ecuación de Schrödinger, justificando el nombre de
- sistemas asintóticamente *libres*

Potenciales para sistemas asintóticamente *libres*

(Newton)-Coulomb-Yukawa

$$V_Y(r) \simeq -g^2 \frac{1}{r} \exp(-\frac{r}{\lambda}) \; ; \quad \lambda = \frac{\hbar c}{m_b c^2}$$

Reducción *estática* del Propagador de las Teorías de Campo

$$V_Y(q) \simeq -g^2 \frac{4\pi}{-(q_0)^2 + \vec{q}^2 + m_b^2}$$

$$\hbar c \simeq 197.3 \; MeV \times fm$$

λ: radio de acción de la interacción
m_b: masa del boson intercambiado

Ejemplos:

Coulomb	$m_b = m_\gamma = 0$	$\lambda \to \infty$
Int. Nuclear Fuerte	$m_b = m_\pi \simeq 140 \; MeV$	$\lambda \simeq 1.4 fm$

En todo caso, si $r \to \infty$ $\quad V_Y(r) \to 0$ - sistemas *libres*

Éxito *increible* de la Ecuación de Schrödinger con estos potenciales

Energías de ligadura

$$6.8 \; eV \leq |E_l| \leq 2.23 \; MeV$$

$$e^2 << g_{nf}^2$$

Interacción nuclear fuerte:
Energías de ligadura *grandes* y carácter no perturbativo de la interacción

Sistemas confinados

Situación nueva para la mecánica cuántica

Hadrones:

- bariones - compuestos por 3 quarks
- mesones - compuestos por quark antiquark (parecidos al positronio)

* Nunca se han encontrado quarks libres, ni en los rayos cósmicos
* Si se suministra energía a los hadrones (con un proceso de dispersión) se producen otros hadrones pero no se liberan los quarks
*

$$M - \sum_i m_i \ > 0 \quad (1)$$

La masa del hadrón M es **mayor** que la suma de las masa de los constituyentes

La QCD asigna el valor de las masa de los quarks de corriente; en los modelos se *fitean* las masas de los quarks constituyentes, pero, en todo caso, vale la desigualdad (1)

No tiene sentido la definición de la energía de ligadura E_l

$$p : (u\ u\ d); \qquad n : (d\ d\ u)$$

Particle Data Group

$$m_u = 2.3^{+0.7}_{-0.5}\ \ MeV/c^2$$

$$m_d = 4.8^{+0.7}_{-0.3}\ \ MeV/c^2$$

Son las masas de corriente *producidas* por el Higgs;
(Sin Higgs, el Modelo Estándar daría: $m_u = m_d = m_i\ \ ...\ \ = 0$)

Sumando, tenemos:

$M(u\ u\ d) \simeq 9.4\ MeV/c^2;\ M(d\ d\ u) \simeq 11.9\ MeV/c^2\ vs\ 940 MeV/c^2$!!

El Higgs explica *sólo* $\simeq 10/940 \simeq 1.1\%$ de la masa
de la materia ordinaria
Lo que queda, el $\simeq 98.9\%$, es masa dada por el *confinamiento* !!

La Física no termina: el descubrimiento del Higgs abre puertas hacia
nuevas áreas de investigación

Ejemplo histórico y exitoso - Cornell

$$V_C(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{\hbar c}{r} + \beta r$$

si $r \to \infty \qquad V_C(r) \to \infty$ - confinamiento
Utilizado para $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$ r: distancia entre quark y antiquark
Extensión a sistemas de tres quarks (nucleón) - Cambia $-\frac{4}{3}\alpha_s$ -

Puntos a favor:
+ se sigue utilizando la ecuación de Schrödinger
+ buena reproducción de los estados de baja excitación
+ *respaldo* por parte de los cálculos de QCD en el retículo

Puntos en contra:
− falta de *naturalidad* física - interacción que crece en todo el espacio
− dificultades en la reproducción de los estados más excitados
− no existe una derivación analítica del confinamiento a partir de la QCD
  y tampoco de un potencial lineal en r
− fuerzas residuales (grandes) entre nucleones - no observadas:
  si $r_{NN} \geq 1.4\ fm$, tenemos *exactamente* $V = V_Y$ con m_π

Solución aproximada y entendimiento *estandar* de las Teorías de Campo

Ecuación de un campo bosónico - que transmite la interacción - en presencia de una fuente del campo $\rho(t,\vec{r})$:

$$\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{(m_b c^2)^2}{(\hbar c)^2}\right]\Phi(t,\vec{r}) = 4\pi\rho(t,\vec{r})$$

- Si $\rho(t,\vec{r}) = 0$ ecuación de Klein-Gordon (o vectorial) libre
- Si $m_b = 0$ ecuación de Maxwell para el potencial vectorial

Si $\rho(t,\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$ **Solución estática**

-Aproximación aceptable si la fuente se mueve *despacio* $v/c << 1$
Tomando una fuente puntual $\rho(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$
Se encuentra facilmente la solución

$$\Phi(\vec{r}) = g\frac{1}{r}\exp(-\frac{r}{\lambda}) \ ; \quad V(r) = -g\Phi(\vec{r}) \ ; \quad \lambda = \frac{\hbar c}{m_b}$$

Como habíamos visto antes: **(Newton) - Coulomb - Yukawa**

Unas consideraciones finales

* Los desarrollos anteriores hacen ver que una teoría de campo estandar, si vale la aproximación estática, no produce confinamiento. Dificultad del problema. En QCD, siendo $m_g = 0$, se obtendría un potencial Coulómbico

* Poner $q_0 = 0$ no permite encontrar todos los términos de correción relativista tampoco de la interacción de Darwin-Fermi-Breit para la QED.
Toca agregar estos términos de manera muy *cuidadosa* teniendo en cuenta la invarianza gauge y/o relativista de la teoría.

* Para la QCD *pueden ser rsponsables* del confinamiento: no conmutación de los generadores de $\mathrm{SU}(3)_C$; valor (no perturbativo) de la constante de acoplamiento α_s ; re-suma de series de diagramas; estructura del vacío.......

* Puede ser interesante explorar los efectos *no estáticos*

* relacionados con la *supresión* de grados de libertad del sistema.
* Recordar: modelos *efectivos*
* Posible con la técnica de las ecuaciones relativistas,
  más claro con la técnica de reducción de Tamm - Dancoff

Conclusiones

- Nueva visión de los términos de *retardo* y de los efectos no locales

- Perspectiva: posible modelo para el confinamiento sin potencial $\to \infty$

- Reto: solución numérica de una ecuación de *tipo Schrödinger* pero con potencial que depende de la energía

Apendix

Aproximación de Tamm Dancoff (TD) para el sistema $q\bar{q}$ $(\hbar = c = 1)$

TD: proyectar la ecuación de valores propios del Hamiltoniano de campo en un sub-espacio con un número finito de partículas

Para el estado ligado $|\Psi>$ consideramos solamente

$$|\Psi >= \varphi|q\bar{q}> +\xi|g\ q\bar{q}> +....$$

Los expertos de QCD dicen que esta expansión tiene sentido a nivel *efectivo* y no para la verdadera QCD.

Proyectamos la siguiente

$$(H_0 + H_I)|\Psi >= M|\Psi >$$

en nuestro sub-espacio.
Poniéndonos en el Centro de Masa ($\vec{P} = 0$), obtenemos

$$[M - 2\epsilon(\vec{p})]\varphi(\vec{p}) = \int d^3p_1' d^3p_2' \bar{h}(\vec{p}, \vec{p}_1', \vec{p}_2')\xi(\vec{p}_1', \vec{p}_2')$$

$$[M - \epsilon(\vec{p}_1') - \epsilon(\vec{p}_2') - \omega(\vec{k}')]\xi(\vec{p}_1', \vec{p}_2') = \int d^3p'' h(\vec{p}_1', \vec{p}_2', \vec{p}'')\varphi(\vec{p}'')$$

Dos ecuaciones integrales acopladas

$\varphi(\vec{p})$ función de onda de $q\bar{q}$, dos partículas, una variable $(\vec{p})$ en el centro de masa

$\xi(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ función de onda de $g\ q\ \bar{q}$, tres partículas, dos variables $(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ en el centro de masa.

$\bar{h}(\vec{p}, \vec{p}_1', \vec{p}_2')$ $\quad h(\vec{p}_1', \vec{p}_2', \vec{p}'')$ Elementos de matriz de absorpción y emisión del un gluón

$\epsilon(\vec{p}) = (m_q^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$ $\quad \omega(\vec{k}') = |\vec{k}'|$ Energías del quark (y antiquark) y del gluón.

Ecuación para $\varphi(\vec{p})$ - suprimiendo la amplitud en donde aparece el gluón

$$[M-2\epsilon(\vec{p})]\varphi(\vec{p}) = \int d^3p'' \frac{m_q}{\epsilon(\vec{p})}\frac{m_q}{\epsilon(\vec{p}'')} V(\vec{p},\vec{p}'',M)$$
$$\times \bar{u}_1(\vec{p})\gamma_1^{\nu} u_1(\vec{p}'')\bar{u}_2(-\vec{p})\gamma_2^{\mu} u_2(-\vec{p}'')g_{\mu\nu}\varphi(\vec{p}'')$$

Parece una ecuación relativista integral estandar, pero

$$V(\vec{p},\vec{p}'',M) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{4\pi}{|\vec{p}-\vec{p}''|[\ |\vec{p}-\vec{p}''| + \epsilon(\vec{p}) + \epsilon(\vec{p}'') - M]}$$

El factor de potencial $V(\vec{p},\vec{p}'',M)$ depende de la Masa (Energía) del sistema porque suprimimos el gluón
(Un detalle técnico: $-g^2 = -\frac{4}{3}\alpha_s$ para $q\bar{q}$, $-e^2$ para e_+e_-)

Recordemos: $\epsilon(\vec{p}) + \epsilon(\vec{p}'') \geq 2m_q$

Si $M < 2m_q$ o, en general, $M < \sum m_i$ el denominador de $V(\vec{p},\vec{p}'',M)$ no tiene ceros y se regresa al potencial estandar de Coulomb + correcciones

La situación es muy diferente si $M > 2m_q$ o, en general, $M > \sum m_i$ y el denominador de $V(\vec{p},\vec{p}'',M)$ se anula.

Veámoslo mejor en el límite no relativista: $\epsilon(\vec{p}) \simeq \epsilon(\vec{p}'') \simeq m_q$.

$$V_{NR}(\vec{p},\vec{p}'',M) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{4\pi}{|\vec{p}-\vec{p}''|[\ |\vec{p}-\vec{p}''| + 2m_q - M]}$$

Recordemos:
$2m_e - M = -E_l$: pequeñísima energía de ligadura del positronio (y de los demás sistemas ligados asintóticamente libres)

Aun cuando se ha llegado a esta ecuación para V, los autores siempre han despreciado términos como éstos que, en cambio, son importantísimos en la física de los quarks.

En el caso estandar del átomo de hidrógeno, del positronio

$$V_C(\vec{p}-\vec{p}'') = -e^2 \frac{4\pi}{|\vec{p}-\vec{p}''|^2}$$

donde $\vec{p}-\vec{p}'' = \vec{q}$ como habíamos visto analizando el propagador de los Diagramas de Feynmann

---

Transformada de Fourier (TdF) en el caso $M > 2m_q$

En el límite N.R. la TdF se puede hacer en forma analítica
Introduciendo el parámetro $b = M - 2m_q$ ($b > 0$ para los quarks)
tenemos

$$V(\vec{r}; b) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{1}{r}\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty dq\ \sin(qr)\frac{1}{q-b}$$

Calculando la integral, toma la forma

$$V(\vec{r}; b) = -\frac{4}{3}\alpha_s \frac{1}{r}\left(\frac{2}{\pi}\right)[\cos(rb)[si(rb)+\pi] - \sin(rb)ci(r|b|)]$$

con

$$si(x) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x dt\ \frac{\sin(t)}{t}$$

$$ci(x) = C + ln(x) + \int_0^x dt\ \frac{\cos(t)-1}{t}$$

y $C = 0.577216$ constante de Euler.

$V(\vec{r}; b)$

- oscilante (*)

- tiene un valor máximo que crece cuando $b = M - 2m_q$ crece.

(*) F. Close *et al.* arXiv:10012553 14 Jan 2010